

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA CURVELET NO  
PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

FELIPE DA CRUZ PIMENTEL MOREIRA SANTOS

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

NITERÓI

30 DE JANEIRO DE 2019

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA CURVELET NO  
PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

FELIPE DA CRUZ PIMENTEL MOREIRA SANTOS

Dissertação apresentada, como requisito parcial,  
para obtenção do título de Mestre ao Programa de  
Dinâmica dos Oceanos e da Terra, da Universidade  
Federal Fluminense.

Orientador: Dr. Wagner Moreira Lupinacci

NITERÓI

30 DE JANEIRO DE 2019

# APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA CURVELET NO PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

Dissertação apresentada, como requisito parcial,  
para obtenção do título de Mestre ao Programa de  
Dinâmica dos Oceanos e da Terra, da Universidade  
Federal Fluminense

Aprovada em 30 de Janeiro de 2019.

Comissão examinadora:

---

Dr. Denis Lage Ferreira da Silva  
(CGG)

---

Prof. Dr. Leandro Di Bartolo  
(COGEO/ON)

---

Prof. Dr. Marco Antônio Cetale Santos  
(GISIS/GGO/UFF)

---

Prof. Dr. Wagner Moreira Lupinacci - Orientador  
(GISIS/GGO/UFF)

## **Agradecimentos**

Agradeço a minha família, em especial aos meu pais, Carla da Cruz Pimentel e Claudio Moreira Santos, por me ajudarem nesta longa jornada.

Ao meu orientador, Wagner Moreira Lupinacci, pelo suporte durante mais essa etapa da minha carreira acadêmica.

Aos colegas que reencontrei e fiz no laboratório GISIS/UFF ao longo desses dois anos: Victor Martins, Felipe Timóteo, Oscar Lima, Roberto Miyamoto, Marta Gomez, Bruna Carbonesi, Adriano de Souza, Ed, Cíntia Queiroz, Thábata Bragutti.

A Paulina Lazarini que mesmo a 10.842,06 Km de distância sempre esteve por perto.

A todo corpo docente e demais funcionários da Universidade Federal Fluminense.

## Resumo

O método sísmico é uma das ferramentas mais utilizadas na investigação em subsuperfície, seja para aplicação terrestre ou marinha. Devido a limites operacionais e questões inerentes do meio-físico da aquisição, há uma série de ruídos que são registrados junto ao sinal. Em específico, o método sísmico terrestre apresenta um problema característico de ruído coerente gerado durante a aquisição, causado pela propagação de ondas de superfície como o *ground-roll*. O presente trabalho visa demonstrar a aplicação da técnica de filtragem no domínio da transformada curvelet (TC), utilizando o truncamento Bayes para remoção de ruídos aleatórios e coerente. Sendo a TC uma ferramenta de análise de multiresolução de caráter direcional formada por elementos anisotrópicos nas escalas mais finas. A metodologia para remoção de ruídos é aplicada em conjunto ao método proposto de representação visual dos coeficientes curvelet em função da escala e orientação do mesmo. Primeiramente em dados sintéticos, para demonstrar a remoção de ruídos aleatórios e coerentes de caráter controlados. Em seguida, a metodologia é inserida ao fluxo de processamento da linha sísmica pré-empilhada 31-81 ao norte do estado do Alasca, disponibilizada pelo Serviço Geológico do Estados Unidos (*USGS*). Nesta aplicação a TC foi utilizada dentro de um fluxo de processamento com o objetivo de remoção do ruído *ground-roll*.

**Palavras chave:** Processamento Sísmico, Atenuação de Ruídos, *Ground-roll*, Transformada Curvelet.

## **Abstract**

The seismic method is one of the most used tools in subsurface prospection, whether for land or marine applications. Due to operational limits and inherent issues of the acquisition physical medium, there are a number of noises that are recorded with the signal. Specifically, the land seismic method presents a characteristic problem of coherent noise generated during the acquisition, caused by the propagation of surface waves such as the ground-roll. The present work aims to demonstrate the application of a filtering technique in the domain of the curvelet transform (TC), using Bayes threshold, for random and coherent noise attenuation. The TC is a multiresolution analysis tool with directional character, formed by anisotropic elements in the finer scales. The methodology for noise removal is applied in conjunction with the proposed method of visual representation of the curvelet coefficients according to its scale and orientation. Firstly in synthetic data to demonstrate the removal of noises in a controlled environment with random and coherent behaviours. After, the methodology is inserted into the seismic flow of the pre-stacked seismic line 31-81 north of the state of Alaska, made available by the United States Geological Survey (USGS). In this application the CT was used within a processing workflow with the purpose of noise attenuation.

**Key-words:** Seismic Processing, Noise Attenuation, Ground-roll, Curvelet Transform

## Lista de Figuras

1	Ao topo dois pulsos sinusoidais, abaixo seu respectivo espectro de amplitude mostrando as frequências centrais de 25 Hz e 70 Hz. . . . .	16
2	Ao topo dois pulsos sinusoidais, abaixo seu respectivo espectrograma mostrando as frequências 25 Hz e 70 Hz de acordo com sua posição no tempo. . . . .	17
3	Ao topo, plano tempo-frequência destacando a caixa de Heisenberg; abaixo três pulsos de frequências distintas, em seguida as densidades de energia do tempo e frequência e seus respectivos desvios padrão. . . . .	19
4	Exemplos de funções <i>wavelet</i> : (a) Chapéu Mexicano, (b) Morlet parte real. . . . .	21
5	Ao topo a <i>wavelet</i> Chapéu Mexicano para valores de $j = 0.5$ (vermelho), $j = 1$ (verde), $j = 2$ (azul) e abaixo os respectivos espectros de amplitude. . . . .	22
6	Em (a) três pulsos sinusoidais e (b) o respectivo escalograma da TW para uma <i>wavelet</i> Chapéu Mexicano utilizando 5 escalas. . . . .	23
7	Representação de elementos curvos em diferentes escales de análise por (a) Transformada <i>wavelet</i> e (b) Transformada Ridgelet/Curvelet. . . . .	24
8	Exemplo uma Ridgelet (a) no centrada em zero, e após manipulações dos parâmetros de (b)escala , (c) rotação e (d) desvio. . . . .	25
9	Etapas para a obtenção da Transformada Ridgelet. . . . .	26
10	Decomposição em sub-bandas representando a etapa inicial da 1ª geração da transformada curvelet, a fim de representar descontinuidades e formas curvas em estruturas lineares. . . . .	27
11	Fluxograma esquemático para a obtenção da primeira geração da transformada curvelet. . . . .	27
12	Curvelets em diferentes localizações, orientações e escalas no plano cartesiano (a) e sua respectiva representação no domínio de Fourier 2D (b). Em (c) vista da curvelet "3"destacada (a) , mostrando seu comportamento ondulatório e sua orientação principal. . . . .	29
13	(a) Coronas concêntricas formando a janela $W(r)$ , (b) Ângulos equidistante no interior das coronas formando a janela $V(t)$ . Destacado em cinza a janela $U_j$ . . . . .	31
14	(a) Segmentação do domínio da frequência, sendo a área sombreada a janela para uma dada curvelet e (b) plano cartesiano relacionada a formação de uma curvelet. . . . .	33

15	Pontos cinzas representando átomos de uma imagem discretizada e segmentados por: (a) coronas concêntricas e (b) retângulos concêntricos. . . . .	35
16	Segmentação do plano de Fourier no domínio discreto, baseado em quadrados concêntricos, onde a área sombreada representa uma dada curvelet. . . . .	37
17	Paralelogramo $\mathcal{P}_{j,l}$ no canto superior esquerdo, e seu equivalente "envolto" na origem na forma de um retângulo resultante da periodização. . . . .	40
18	Modelo sintético contendo três eventos lineares. . . . .	42
19	Distribuição dos coeficientes curvelet para o modelos sintético contendo três eventos lineares, para a escala a) $j = 1$ , b) $j = 2$ , c) $j = 3$ , d) $j = 4$ , e) $j = 5$ e f) $j = 6$ . . . .	43
20	Em (a) um sinal linear, (b) aplicado o truncamento abrupto e (c) aplicado truncamento suave. . . . .	45
21	a) Modelo sintético base, e (b) o conteúdo de frequência para um traço do modelo sintético . . . . .	47
22	Modelos sintéticos contaminados por: a) ruído branco, b) ruído de baixa frequência, c) ruído de alta frequência, d) ruído branco e <i>GR</i> . . . . .	48
23	Comparação entre espectro de amplitude para o modelo sintético original (em preto) e o dos modelo contaminado por: a) ruído branco (em vermelho); b) ruído de baixa (em roxo); c) ruído de alta (em verde); d) ruído branco e <i>GR</i> (azul). . . . .	49
24	a) Modelo sintético com ruido branco; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet ;c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente. . . . .	51
25	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 1$ para o modelo sintético com ruído de branco a) antes e b) após a filtragem. . . . .	52
26	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 2$ para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	52
27	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 3$ para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	53
28	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 4$ para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	53

29	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 5$ para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	53
30	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 6$ para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	54
31	a) Modelo sintético com ruído de baixa frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente. . . . .	55
32	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 1$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	56
33	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 2$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	56
34	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 3$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	57
35	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 4$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	57
36	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 5$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	57
37	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 6$ para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	58
38	a) Modelo sintético com ruído de alta frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente. . . . .	59
39	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 1$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	60
40	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 2$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	60
41	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 3$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	61

42	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 4$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	61
43	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 5$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	61
44	Coeficientes curvelet normalizados na escala $j = 6$ para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem. . . . .	62
45	a) Modelo sintético com ruído de alta frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente. . . . .	63
46	Coeficientes curvelet na escala $j = 1$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	64
47	Coeficientes curvelet na escala $j = 2$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	64
48	Coeficientes curvelet na escala $j = 3$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	65
49	Coeficientes curvelet na escala $j = 4$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	65
50	Coeficientes curvelet na escala $j = 5$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	65
51	Coeficientes curvelet na escala $j = 6$ para o modelo sintético com ruído branco e <i>GR</i> : a) antes e b) após a filtragem. . . . .	66
52	Localização da região Reserva Nacional do Alasca ( <i>NPRA</i> ). . . . .	67
53	Área de prospecção sísmica N-PR-81-AK, destacando a linha 31-81 em vermelho. . . . .	68
54	Tiros brutos 101 a 104. . . . .	69
55	Espectro FK para o tiro bruto 101. . . . .	70
56	Fluxo de processamento aplicado para a linha 31-81. . . . .	70
57	Tiros 101 a 104 após a aplicação do ganho correção de divergência esférica. . . . .	72
58	Tiros 101 a 104 após o AGC e a deconvolução <i>spike</i> . . . . .	73
59	Tiros 101 a 104 após a aplicação do filtro passa banda de 2 a 60Hz. . . . .	74

60	Perfil FK para o tiros 101 após a aplicação do ganho correção de divergência esférica .	75
61	Perfil FK para o tiro 101 após AGC e deconvolução <i>spike</i> . . . . .	75
62	Perfil FK para o tiros 101 após aplicação do filtro passa banda 2-60Hz. . . . .	76
63	Coeficientes curvelet na escala $j = 1$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	77
64	Coeficientes curvelet na escala $j = 2$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	77
65	Coeficientes curvelet na escala $j = 3$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	77
66	Coeficientes curvelet na escala $j = 4$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	78
67	Coeficientes curvelet na escala $j = 5$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	78
68	Coeficientes curvelet na escala $j = 6$ para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem. .	78
69	Tiros 101 a 104 após a aplicação da filtragem curvelet. . . . .	79
70	Resíduos da filtragem curvelet para os Tiros 101 a 103. . . . .	80
71	Perfil FK para o tiros 101 após a aplicação da filtragem curvelet. . . . .	81
72	Seção final empilhada normalizada resultante do processamento utilizando a transformada curvelet no fluxo proposto. . . . .	82
73	Seção empilhada bruta. . . . .	83
74	Resíduo da seção final empilhada. . . . .	84

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Transformadas Lineares</b>	<b>15</b>
2.1	Transformada de Fourier . . . . .	15
2.2	Transformada Wavelet Contínua . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Transformada Curvelet</b>	<b>24</b>
3.1	Transformada Curvelet Contínua . . . . .	30
3.2	Transformada Curvelet Discreta via <i>wrapping</i> . . . . .	34
3.3	Representação de Coeficientes Curvelet . . . . .	42
3.4	Método de Filtragem dos Coeficientes Curvelet via Bayes . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Aplicação da Transformada Curvelet a Dados Sísmicos</b>	<b>47</b>
4.1	Modelos sintéticos . . . . .	47
4.2	Dado Terrestre NPRA 31-81 . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Referências</b>	<b>86</b>

# 1 Introdução

Dentre os métodos de exploração geofísicos a sísmica de reflexão representou grande avanço na exploração de recursos petrolíferos. O método sísmico consiste na propagação de um campo de ondas, gerado por uma fonte artificial, e o registro deste campo refletido em subsuperfície (YILMAZ, 2001). Entretanto, o registro sísmico é formado pela combinação entre sinal propagado e o ruído, seja ele aleatório ou coerente, que compromete o imageamento. Ruídos aleatórios estão relacionados a fatores operacionais durante o registros, de forma que o mesmo não é correlacionável entre traços. Já o ruído que apresenta coerência entre traços, está relacionado ao registro de energia sísmica indesejada e em geral apresentando um comportamento linear no registro sísmico (GAVOTTI; LAWTON, 2013). Como exemplo, durante a aquisição terrestre há o chamado *ground-roll* em função do registro de ondas que se propagam diretamente em superfície. Sendo o foco do processamento sísmico aumentar a razão sinal-ruído, preservando o sinal e com isso melhor imagear as estruturas geológicas.

No domínio do tempo, no qual o sinal sísmico é registrado, a separação entre sinal e ruído não se apresenta de forma trivial. Certas técnicas de processamento visam transpor o dado para um domínio na qual o ruído possa ser atenuado sem que do sinal seja deteriorado. Dentre as ferramentas comumente utilizadas podem ser citadas as transformada de Fourier (TF) e transformada wavelet (TW), nas quais o sinal é decomposto em função da frequência (MALLAT, 1999). Estas transformadas representaram significativos avanços no processamento sísmico, porém ambas limitam-se por representarem apenas descontinuidades singularidades. Inicialmente apresentada por Candès e Donoho (1999) e recentemente atualizada por Candès et al. (2006), a transformada curvelet (TC) surgiu como uma ferramenta capaz de representar de estruturas curvas, basanada em funções oscilatórias multi-escalares.

Dada sua natureza de distribuição espacial em diferentes orientações e localização no domínio da frequência e espaço, curvelets mostram-se altamente adaptáveis a representação de estruturas sísmicas. Sendo esta transformada já amplamente utilizadas em aplicações sísmicas. Dentre as aplicações da transformada curvelet no processamento sísmico, cabem ressaltar as que envolvem: atenuação de ruídos (NEELAMANI et al., 2008; HENNENFENT; HERRMANN, 2006; SHAN; MA; YANG, 2009; KUMAR et al., 2011; HENNENFENT; COLE; KUSTOWSKI, 2011; GÓRSZCZYK, 2017; FRANCO; MORAES, 2015); atenuação do

ruído *ground-roll* (OLIVEIRA et al., 2012; HEJAZI; SHAHBAZIAN; RIAHI, 2013; NAGHIZADEH; SACCHI, 2018); interpolação de dados regulamente e irregularmente amostrados (HERRMANN; HENNENFENT, 2008; NAGHIZADEH; SACCHI, 2010; YANG; GAO; CHEN, 2012; GAN et al., 2015); condicionamento para migração e inversão (HERRMANN et al., 2009; GOMES et al., 2017; LUPINACCI; FRANCO; ASSIS, 2016); atenuação de múltiplas (DONNO; CHAURIS; NOBLE, 2010).

Este trabalho tem como objetivo apresentar a aplicação de forma prática e interativa da TC no processamento de dados sísmicos, baseada na metodologia de visualização dos coeficientes *curvelet* aqui proposta. Para de atenuação de ruídos é utilizada o truncamento Bayes (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), aplicada no domínio *curvelet*. São apresentados dados sintéticos com presença de ruídos aleatórios e coerentes com caráter controlado, de modo a expor a capacidade de aplicação da filtragem no domínio *curvelet*. Em seguida, a metodologia utilizando a TC é incorporada ao processamento sísmico de um dado terrestre visando a remoção do *ground-roll*.

O presente trabalho inicia por uma revisão teórica das contribuições para o desenvolvimento e compreensão da metodologia aqui aplicada, para então apresentar o teoria da transformada *curvelet*. Depois é apresentado o método de representação dos coeficientes, seguida da metodologia de truncamento via Bayes. Após, são expostos os resultados das aplicações e discussões sobre os mesmos. Por último, são feitas as conclusões finais sobre o trabalho e recomendações para futuras aplicações.

## 2 Transformadas Lineares

Este capítulo visa rever os principais conceitos utilizados para a análise multiresolução no sinal sísmico, neste são apresentadas as formulações contínuas da transformada de Fourier e transformada *wavelet*.

### 2.1 Transformada de Fourier

Em processamento de sinais, a transformada de Fourier (TF) é uma ferramenta que atua de modo a combinar a funções sinusoidais para representar sinais estacionários (MALLAT, 1999; YILMAZ, 2001). Dada uma função contínua no tempo  $s(t)$ , sua transformada no domínio de Fourier ( $\hat{\mathcal{F}}(\omega)$ ) é definida como:

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.1)$$

na qual  $t$  representa o tempo,  $e$  o número de euler,  $i$  o número complexo e  $\omega$  frequência angular. Essencialmente, a Equação 2.1 relaciona a amostragem do sinal  $s(t)$  em tempo ao seu conteúdo de frequência. Sendo  $\hat{\mathcal{F}}(\omega)$  uma função complexa, esta pode ser representada na forma:

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}, \quad (2.2)$$

na qual  $A(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  são os espectros de amplitude e fase, respectivamente, e obtidos por:

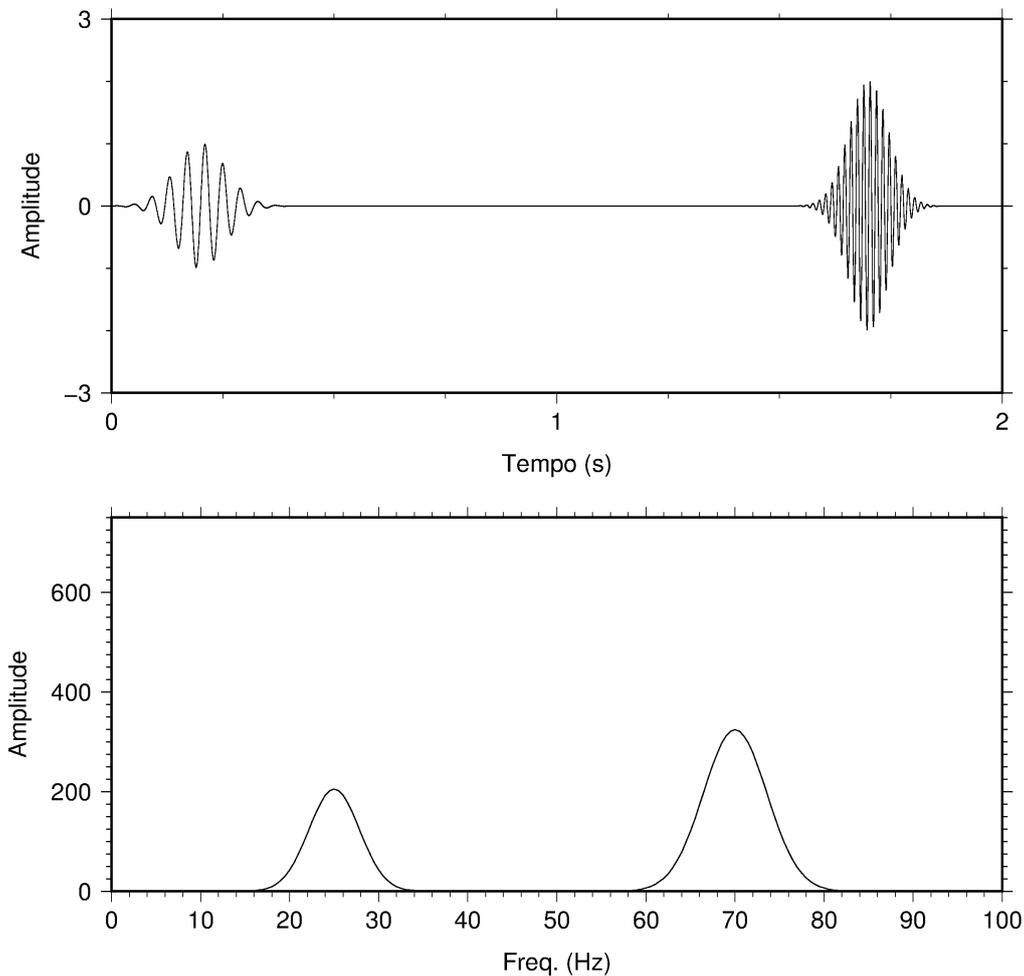
$$A(\omega) = \sqrt{\hat{\mathcal{F}}_{real}^2(\omega) + \hat{\mathcal{F}}_{img}^2(\omega)}, \quad (2.3)$$

e

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\hat{\mathcal{F}}_{img}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_{real}(\omega)}. \quad (2.4)$$

na qual  $\hat{\mathcal{F}}_{img}$  e  $\hat{\mathcal{F}}_{real}$  são as partes imaginária e real de  $\hat{\mathcal{F}}$ , respectivamente. A Figura 1 ilustra um sinal composto por dois pulsos sinusoidais, centrados em tempos distintos, e seu respectivo espectro de amplitude, calculado via transformada de Fourier.

Figura 1: Ao topo dois pulsos sinusoidais, abaixo seu respectivo espectro de amplitude mostrando as frequências centrais de 25 Hz e 70 Hz.



Fonte: O autor.

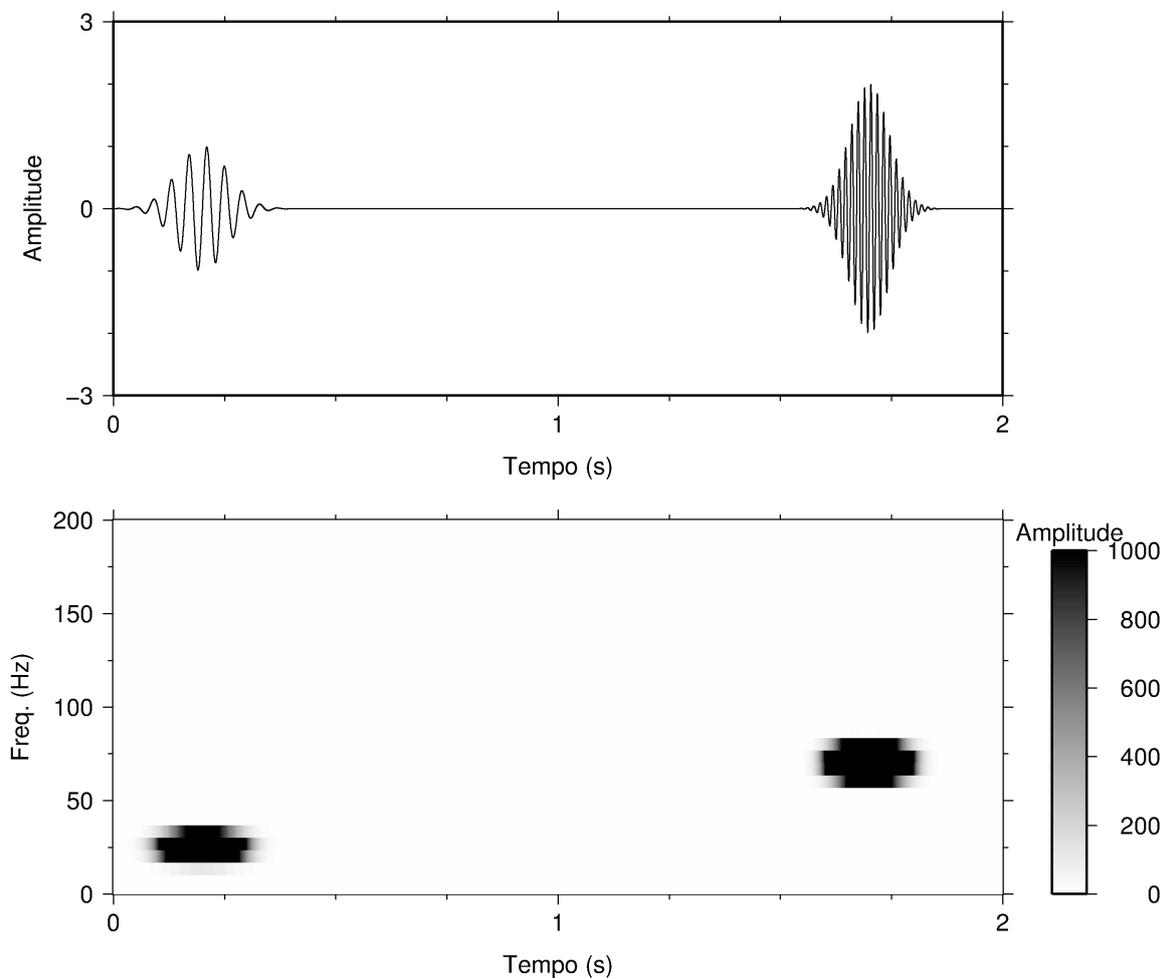
Observando a Equação 2.1, é possível notar que a análise do sinal é feita sobre todo o intervalo, ou seja, independente da disposição das frequências ao longo do tempo. Desta forma, a TF não é adequada para análise de sinais não estacionários, onde ocorrem variações locais de frequência. Em vista desta

limitação, Gabor (1946) propôs a análise de Fourier sobre espaços amostrais, podendo assumir que o sinal possua um comportamento estacionário dentro de uma janela de análise. A chamada transformada Fourier de tempo curto (TFTC) é definida por:

$$\mathcal{T}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.5)$$

na qual  $g(t - \tau)$  é a uma janela Gaussiana, sob um tempo  $\tau$ . A Figura 2 mostra o resultado da análise do mesmo sinal na Figura 1 utilizando uma janela temporal de  $\tau = 0,15$  s, calculado via TFTC.

Figura 2: Ao topo dois pulsos sinusoidais, abaixo seu respectivo espectrograma mostrando as frequências 25 Hz e 70 Hz de acordo com sua posição no tempo.



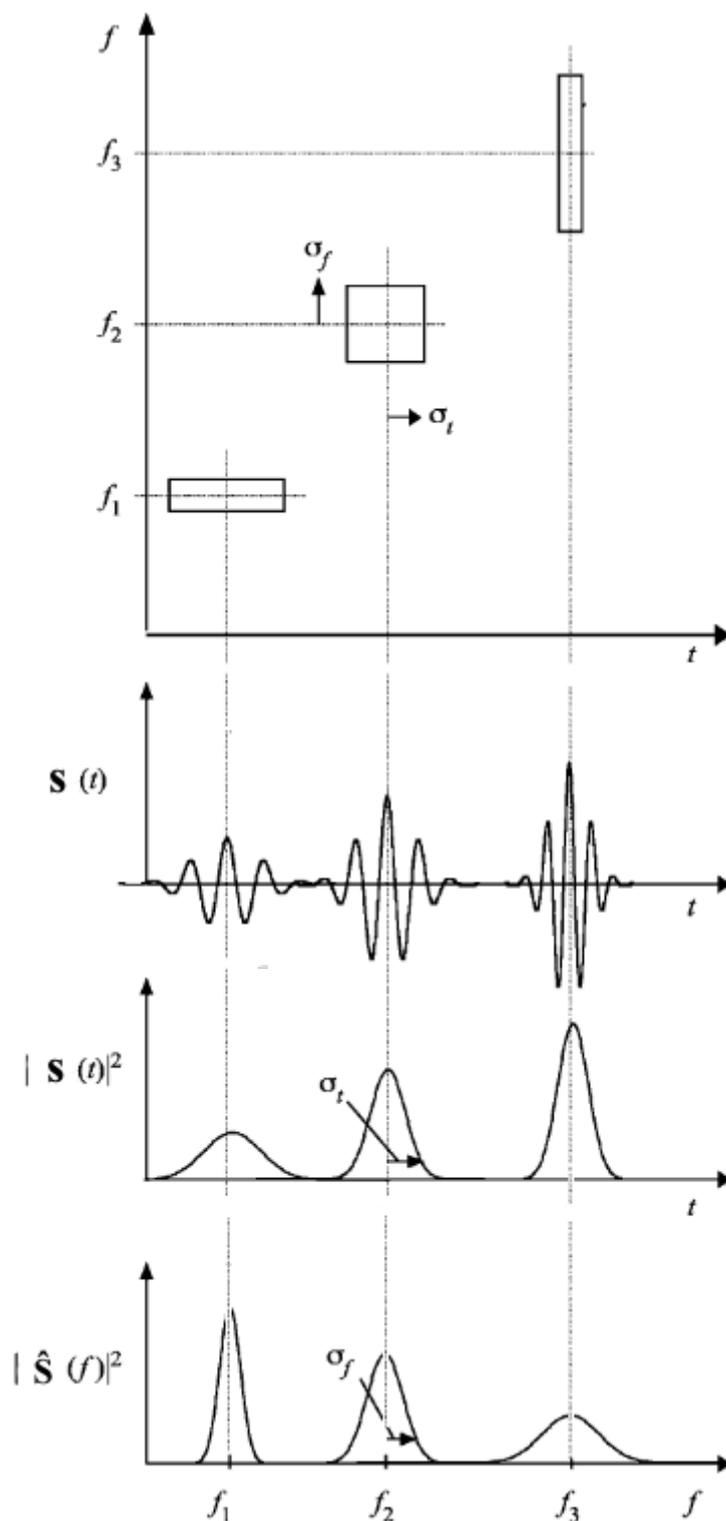
Fonte: O autor.

Devido a segmentação do sinal  $s(t)$  durante a aplicação da TFTC, ocorre um fenômeno associado ao

tamanho da janela de amostragem. Este efeito é conhecido como princípio de incerteza de Heisenberg. Segundo este princípio, existe um limite de resolução imposto sob a escolha da janela de tempo. De maneira que quanto menor a janela de análise melhor a resolução temporal, porém, menor a resolução no domínio da frequência. Em contrapartida, para uma maior janela de análise melhor a resolução no domínio da frequência e pior a resolução temporal.

Este efeito pode ser quantificado utilizando o desvio padrão da densidade de energia no plano da frequência ( $\sigma_f$ ) e do tempo ( $\sigma_t$ ), aonde a área de  $2\sigma_f$  por  $2\sigma_t$  é chamada de caixa de Heisenber (Figura 3). Este principio afirma que o produto  $\sigma_f$  por  $\sigma_t$  deve ser maior ou igual a  $1/4\pi$ , de forma que a área mínima da caixa seja igual a  $1/\pi$ .

Figura 3: Ao topo, plano tempo-frequência destacando a caixa de Heisenberg; abaixo três pulsos de frequências distintas, em seguida as densidades de energia do tempo e frequência e seus respectivos desvios padrão.



Fonte: Modificado, Addison (2002).

## 2.2 Transformada Wavelet Contínua

A introdução da transformada de Fourier de tempo curto (TFTC) permite a análise de sinais não estacionários. Contudo, sua limitação é dada pela escolha arbitrária da janela de análise, tornando-a pouco eficiente em aplicações práticas. De modo similar a TFTC, onde a base da transformada utiliza janelas Gaussianas de tamanho único, a transformada *wavelet* (TW) usa janelas com tamanhos variáveis para análise. Para frequências mais baixas são utilizadas janelas maiores, já para frequências mais altas são utilizadas janelas mais curtas (RIOUL; VETTERLI, 1991). Esta modularidade entre a janela de análise e frequência compensa o efeito da incerteza de Heisenberg.

Aplicação da TW é composta por versões escalonadas e transladadas da função base chamada *wavelet*-mãe ( $\Psi$ ):

$$\Psi_{x,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{j}} \Psi^* \left( \frac{t-x}{j} \right), \quad (2.6)$$

na qual  $j$  é parâmetro de escala,  $x$  a posição e  $\Psi^*$  é complexo conjugado da *wavelet*-mãe. As *wavelets* são essencialmente formas de onda, que obedecem certos princípios matemáticos (ADDISON, 2002). As seguintes propriedades definem uma função *wavelet*

1. Uma *wavelet* deve possuir energia finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.7)$$

caso  $\Psi(t)$  seja uma função complexa a magnitude deve ser obtida tanto para a parte real quanto a parte imaginária.

2. Seja  $\hat{\Psi}(\omega)$  a TF de  $\Psi(t)$ , a seguinte condição deve ser mantida:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (2.8)$$

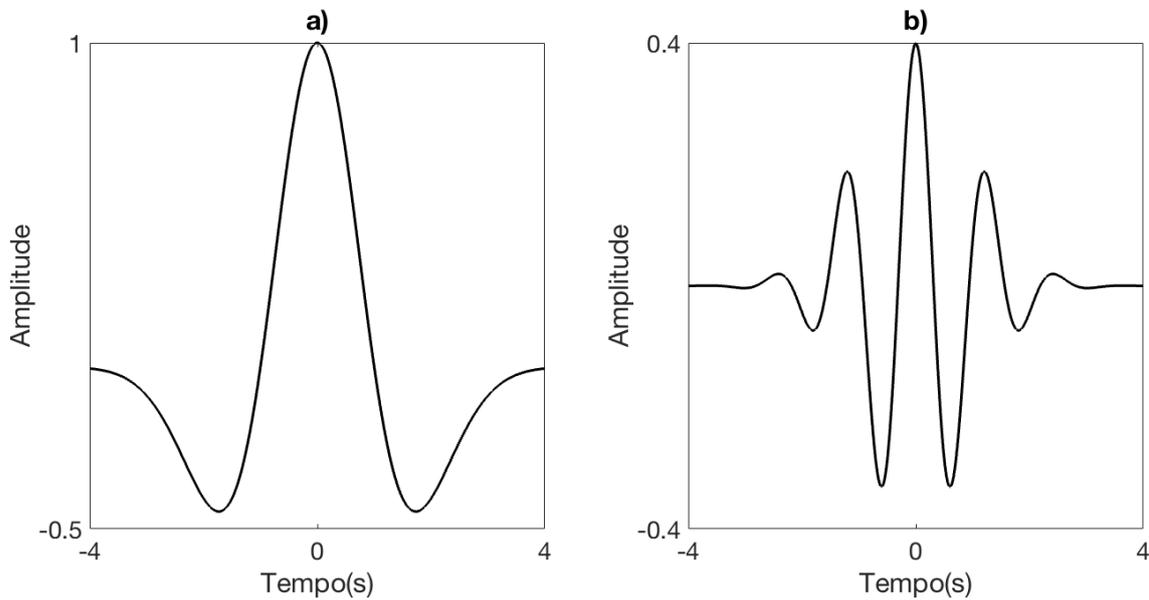
esta condição implica que a função não possui componentes de frequência zero ( $\hat{\Psi}(0) = 0$ ), ou

seja, a *wavelet* possui média zero. A Equação 2.8 é conhecida como condição de admissibilidade e varia de acordo com a escolha da *wavelet*.

Como exemplos de funções *wavelets* que seguem as propriedades descritas acima temos:

- *Wavelet* Chapéu Mexicano  $\Psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$  (Figura 4a);
- *Wavelet* Morlet (Real):  $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(2\pi\nu_0 t)$ ,  $\nu_0 > 0.8$  (Figura 4b).

Figura 4: Exemplos de funções *wavelet*: (a) Chapéu Mexicano, (b) Morlet parte real.



Fonte: O autor.

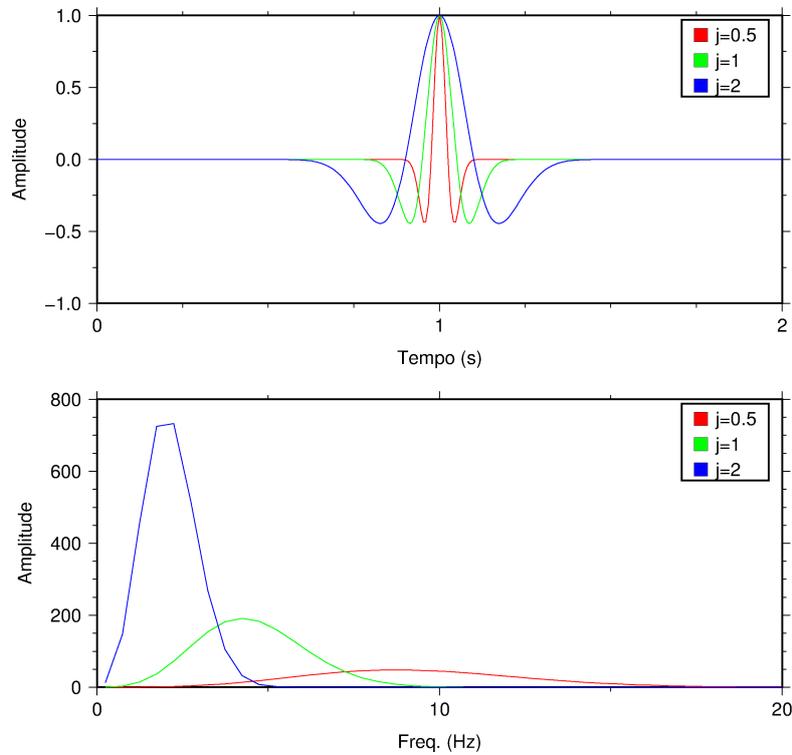
Desta forma, a aplicação da *wavelet* consiste em manipular os parâmetros  $j$  e  $b$ , na qual a TW de um sinal contínuo  $s(t)$  é representada por:

$$\mathcal{W}(j, x) = \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \Psi^*\left(\frac{t-x}{j}\right) dt. \quad (2.9)$$

A TW age sob o sinal como um filtro passa-banda, proporcional a escala  $j$  em cada posição  $x$  (ADDISON, 2002). Sendo a frequência de análise inversamente proporcional a escala da *wavelet* utilizada ( $f \propto 1/j$ ). A Figura 5 mostra a variação do espectro de amplitude da *wavelet* Chapéu

Mexicano, em função da variação da escala.

Figura 5: Ao topo a *wavelet* Chapéu Mexicano para valores de  $j = 0.5$  (vermelho),  $j = 1$  (verde),  $j = 2$  (azul) e abaixo os respectivos espectros de amplitude.



Fonte: O autor.

A transformada *wavelet* possui as seguintes propriedades:

1. É uma operação linear. Sejam  $a_1$  e  $a_2$  dois valores escalar quaisquer, se  $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ , sua transformada tem a forma:

$$\mathcal{W}[f(t)] = a_1 \mathcal{W}[f_1(t)](j, x) + a_2 \mathcal{W}[f_2(t)](j, x);$$

2. É covariante sob translação. Seja  $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$  sua transformada tem a forma:

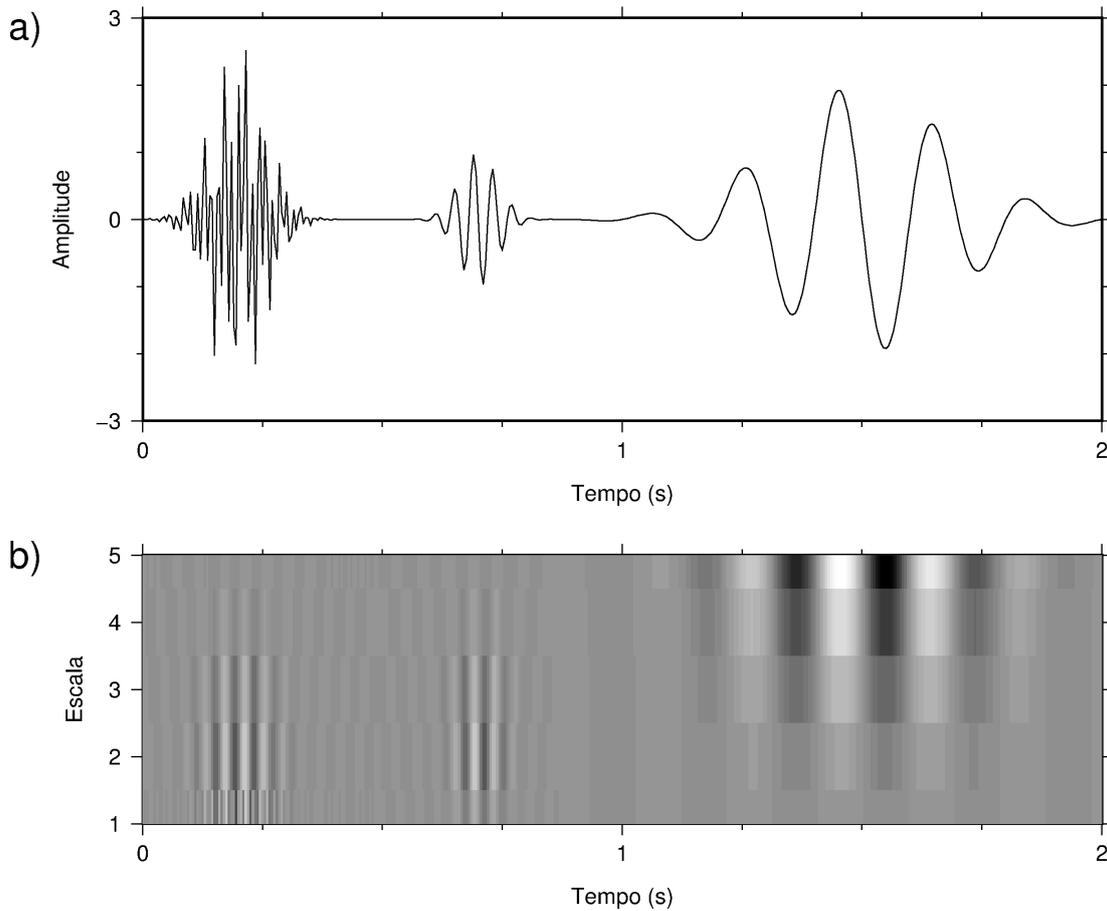
$$\mathcal{W}[f_0(t)] = \mathcal{W}[f(t)](j, x - t_0);$$

3. É covariante sob dilatação. Seja  $f_{a_1}(t) = f(a_1 t)$  sua transformada tem a forma:

$$\mathcal{W}(j, x) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \mathcal{W}(a_1 j, s x).$$

Ao decompor um sinal utilizando a TW, este é representado no tempo em função da variação de escalas, no chamado escalograma. Aplicando a TW a sinal sinusoidal (Figura 6a), utilizando a *wavelet* Chapéu Mexicano para 5 escalas, é possível observar que o pulso de maior frequência é melhor representado nas escalas de 1 a 3 (Figura 6b). Já o pulso de baixa frequência é melhor representado nas escalas de 3 a 5. Também é possível notar que no escalograma a representação dos pulsos no tempo é mantida, independente da escala.

Figura 6: Em (a) três pulsos sinusoidais e (b) o respectivo escalograma da TW para uma *wavelet* Chapéu Mexicano utilizando 5 escalas.

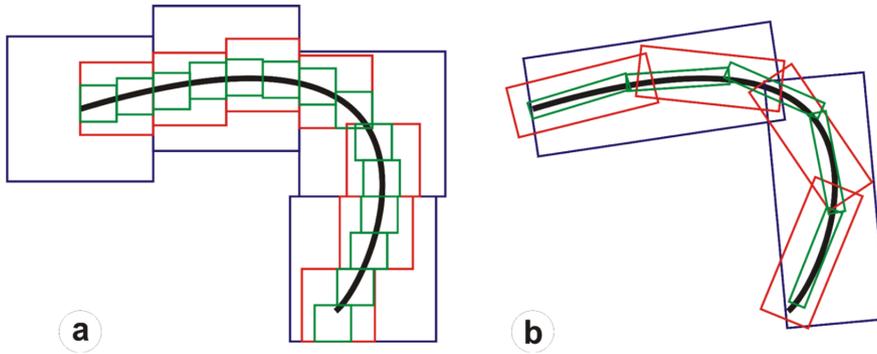


Fonte: O autor.

### 3 Transformada Curvelet

A medida que a transformada *wavelet* (TW) apresentou uma significativa melhora nas análises multirresolução, sua aplicação se limita a não representação de estruturas lineares anisotrópicas ou curvilíneas. Por definição a TW apenas representam singularidades pontuais (Figura 7a) ignorando estruturas geométricas (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010; MA; PLONKA, 2010). Em vista de tal limitação, Candès e Donoho (1999) inicialmente propuseram a Transformada Ridgelet (TR) como uma generalização da TW. Com a TR é possível incorporar informações do alinhamento angular para melhor representar eventos anisotrópicos (Figura 7b).

Figura 7: Representação de elementos curvos em diferentes escales de análise por (a) Transformada *wavelet* e (b) Transformada Ridgelet/Curvelet.



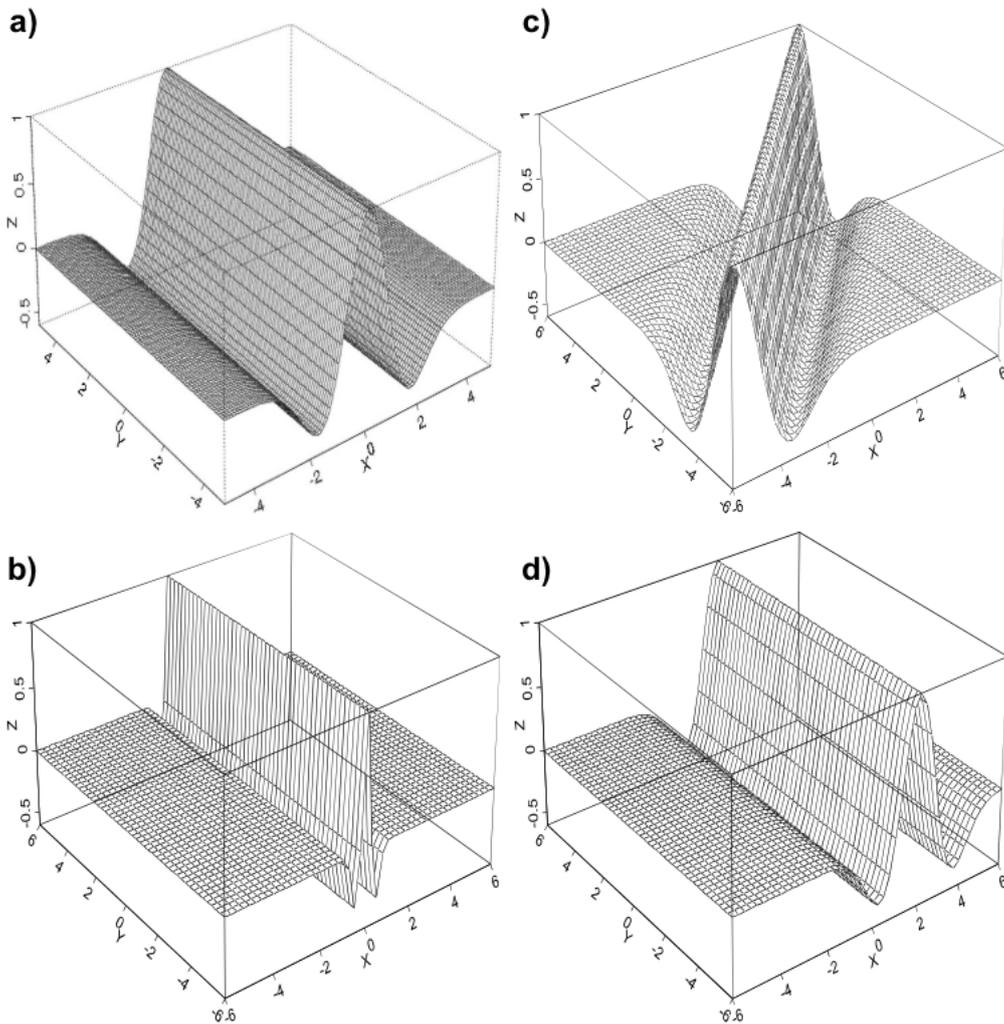
Fonte: Modificado, Górszczyk (2017).

Ridgelets (Figura 8a) são uma classe de *wavelets* 2D, que além da variação da escala (Figura 8b) possuem os parâmetros adicionais de rotação (Figura 8c) e desvio (Figura 8d). Para cada escala  $j > 0$ , posição  $b \in \mathbb{R}$  e orientação  $\theta \in [0, 2\pi)$ , podemos definir uma Ridgelet como:

$$\Psi_{a,b,\theta}(t) = \Psi(t_1, t_2) = a^{-1/2} \Psi \left( \frac{t_1 \cos \theta + t_2 \sin \theta - b}{a} \right), \quad (3.1)$$

na qual  $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}$ , sendo esta função constante ao longo das linhas  $t_1 \cos \theta + t_2 \sin \theta$ , e transversalmente comporta-se como uma *wavelet*.

Figura 8: Exemplo uma Ridgelet (a) no centrada em zero, e após manipulações dos parâmetros de (b)escala , (c) rotação e (d) desvio.



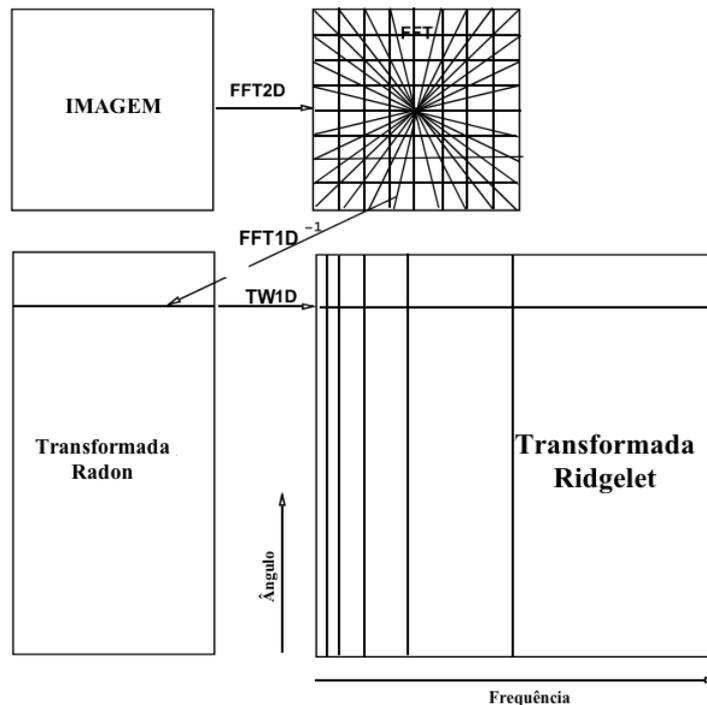
Fonte: Modificado, Starck, Murtagh e Fadili (2010).

A implementação da TR consiste em obter a TF 2D de uma imagem, em seguida, segmentar o plano de Fourier em um grid pseudo polar, formado por linhas de inclinação equidistantes. Para cada linha deste grid é calculada a TF inversa e aplicada a transformada Radon (TR). Esta transformada pode ser definida como a integral sobre uma linha, de inclinação  $p$  e *offset*  $\tau$  sob uma função  $f(x, y)$ , na forma:

$$\mathcal{G}(p, \tau)[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, px + \tau) dx . \quad (3.2)$$

O ultimo passo é aplicar a TW e então obter a TR como uma função do ângulo e frequência. A Figura 9 ilustra os passos para obter a TR.

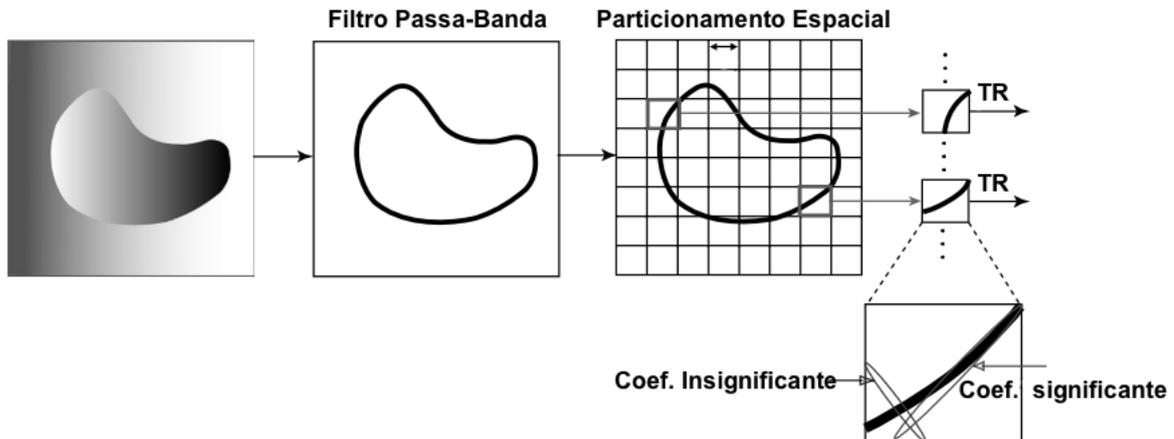
Figura 9: Etapas para a obtenção da Transformada Ridgelet.



Fonte: Modificado, Starck, Murtagh e Fadili (2010).

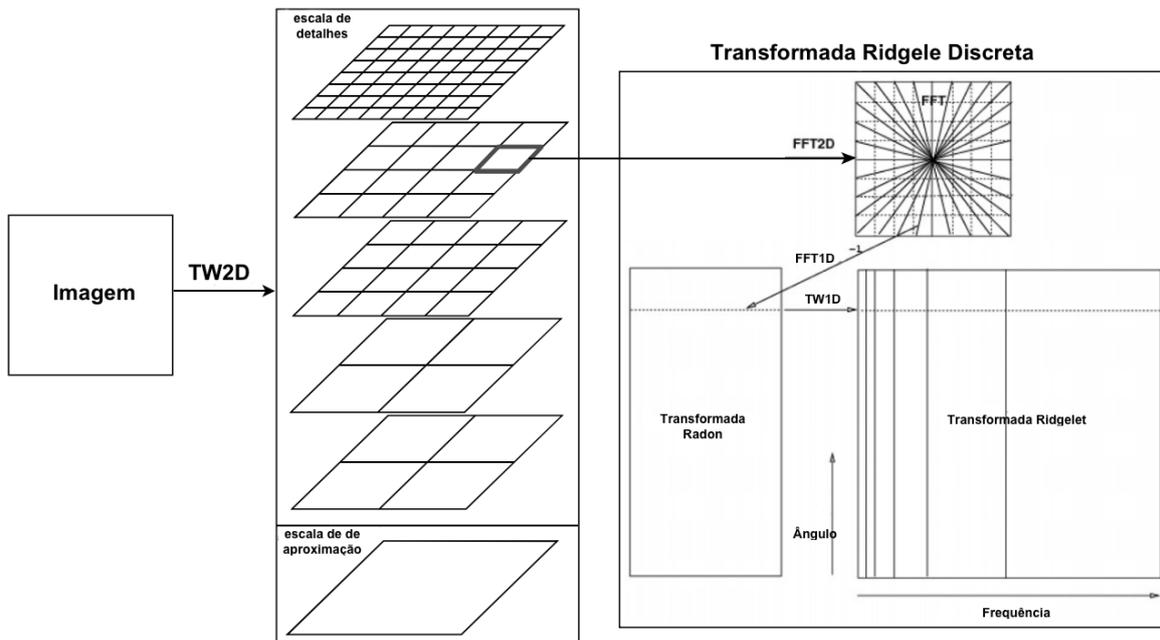
Contudo, apesar de poder representar estruturas anisotrópicas a implementação da TR não consegue representar arestas ou descontinuidades, uma vez que pela sua construção uma Ridgelet apenas consegue reproduzir estruturas lineares. Em vista disto, Candès e Donoho (2000) reformularam da TR, agora a renomeando para transformada curvelet (TC), aplicando a TW 2D como passo inicial. Esta etapa tem como propósito representar curvas em diferentes escalas na forma de estruturas lineares (Figura 10). Para cada escala da TW 2D é retirada uma janela de análise, cujo tamanho segue o escalonamento parabólico ( $\text{largura} \approx \text{comprimento}^2$ ) e então aplicada a TR. A Figura 11 ilustra a aplicação da primeira geração da CT.

Figura 10: Decomposição em sub-bandas representando a etapa inicial da 1ª geração da transformada curvelet, a fim de representar descontinuidades e formas curvas em estruturas lineares.



Fonte: Modificado, Starck, Murtagh e Fadili (2010).

Figura 11: Fluxograma esquemático para a obtenção da primeira geração da transformada curvlet.



Fonte: Modificado, Starck, Murtagh e Fadili (2010).

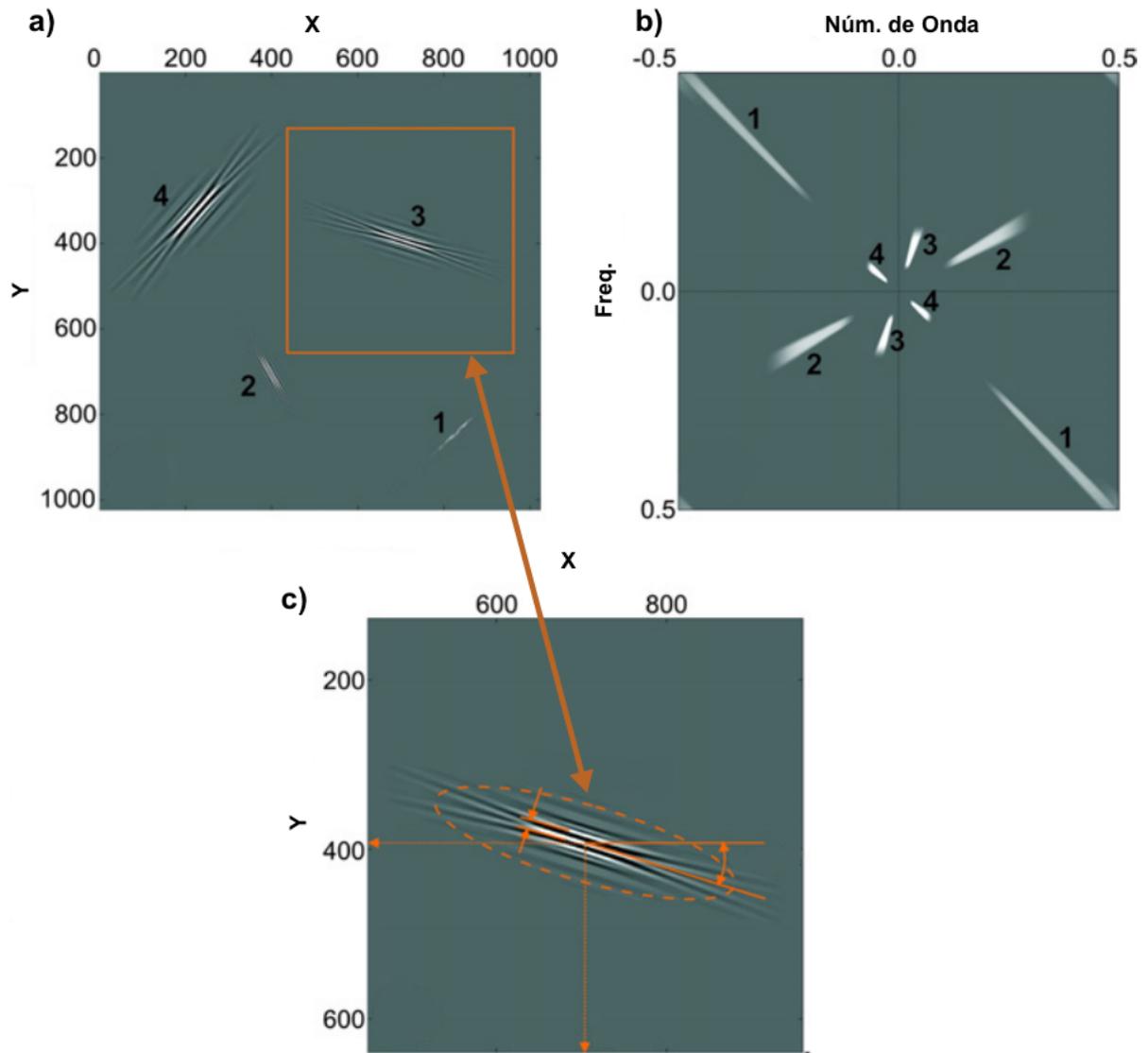
A implementação desta primeira geração apresenta algumas desvantagens. Primeiramente, o excesso de parâmetros que envolvem o uso sequencial de diversas transformadas em diferentes bases torna as operações complexas. Segundo, o escalonamento parabólico não é sempre seguido, associado a sobreposição de blocos, aumentando a redundância dos coeficientes.

Diante dessas limitações, Candès et al. (2006) apresentaram a segunda geração TC, a qual é formada por uma base composta de elementos multiescala, multidirecionais e localizados tanto no domínio do espaço quanto da frequência. Com esta nova geração foi possível reduzir a complexidade e a redundância, tornando sua aplicação mais eficiente. A atual TC apresenta uma indexação simplificada, tendo apenas três parâmetros: escala, orientação e localização.

Uma curvelet no espaço é representada por uma forma de onda localizada e alongada (Figura 12a) que oscilam perpendicularmente a orientação principal (Figura 12c). Já no domínio de Fourier, as curvelets são representadas na forma de cunhas diagonais, obedecendo o escalonamento parabólico, localizadas de acordo com sua escala e orientação (Figura 12b).

Outra propriedade relevante da CT é a representação esparsa de objetos geométricos de comportamento curvo e suave, sem descontinuidades abruptas (CANDÈS et al., 2006). Este comportamento é similar ao que é encontrado em refletores sísmicos. Esta propriedade permite que um menor número de coeficientes seja necessário para a representação de uma imagem contendo estas características.

Figura 12: Curvelets em diferentes localizações, orientações e escalas no plano cartesiano (a) e sua respectiva representação no domínio de Fourier 2D (b). Em (c) vista da curvelet "3" destacada (a), mostrando seu comportamento ondulatório e sua orientação principal.



Fonte: Modificado, Gorrzeczyk, Adamczyk e Malinowski (2014).

### 3.1 Transformada Curvelet Contínua

Dado um plano em duas dimensões,  $\mathbb{R}^2$ , no qual  $x = (x_1, x_2)$  seja um par de coordenadas espaciais,  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  um par de coordenadas no domínio da frequência,  $r$  e  $\theta_l$  as coordenadas polares no domínio da frequência. São definidas a janela radial  $W(r)$ , formada por coronas concêntricas (Figura 13a), e a janela angular  $V(t)$ , formada por ângulos equidistantes (Figura 13b), ambas janelas são suaves, não negativas e reais. Com o domínio da janela radial e angular respectivamente,  $x \in (1/2, 2)$  e  $t \in [-1, 1]$ , e assumindo a condição de admissibilidade:

$$\begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} W^2(2^i r) = 1 & r \in (3/4, 3/2); \\ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} V^2(t - l) = 1 & t \in (-1/2, 1/2). \end{cases} \quad (3.3)$$

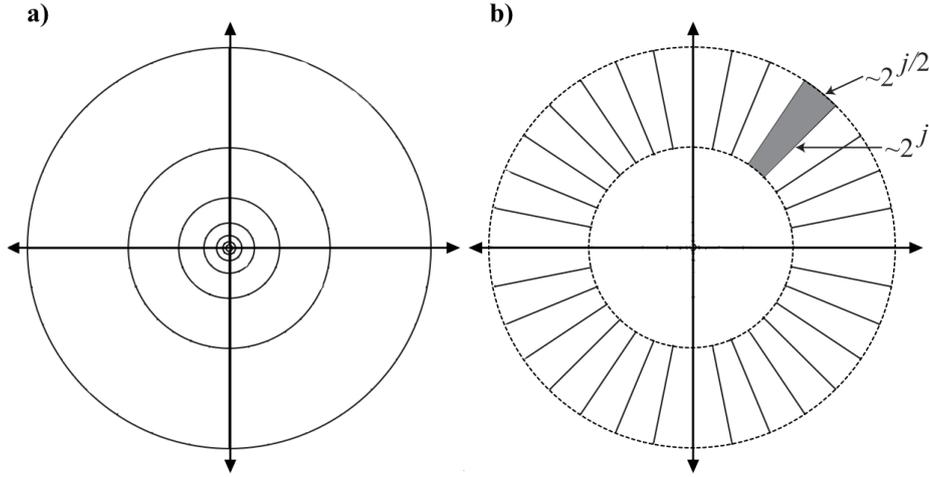
A cada corona de raio  $2^{j-1/2} \leq r \leq 2^{j+1/2}$ , há  $4 \cdot 2^{\lfloor j/2 \rfloor}$  ângulos, dobrando a cada duas coronas. Para cada escala  $j > j_0$  é definida a janela de frequência  $U_j$  (Figura 13b), em função de  $W$  e  $V$ , como:

$$U_j(r, \theta) = 2^{-3j/4} W(2^{-j} r) V\left(\frac{2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta}{2\pi}\right). \quad (3.4)$$

O suporte da janela  $U_j$  pode ser definido como uma quina polar, de comprimento e largura dependentes de  $W$  e  $V$ , respectivamente. A janela  $U_j$  é aplicada na construção da *wavelet* mãe ( $\varphi$ ), através de sua transformada de Fourier como:

$$\hat{\varphi}_{j,l,k} = U_j(\omega). \quad (3.5)$$

Figura 13: (a) Coronas concêntricas formando a janela  $W(r)$ , (b) Ângulos equidistante no interior das coronas formando a janela  $V(t)$ . Destacado em cinza a janela  $U_j$ .



Fonte: Modificado, Candès et al. (2006).

É possível obter curvelets a partir da rotação ( $\theta_l$ ) e translação ( $k$ ), de forma que:

- Os ângulos equidistantes  $\theta = 2\pi \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} \cdot l$ , sendo  $l = 0, 1, 2, \dots$ , tal que  $0 \leq \theta_l < 2\pi$ ;
- O parâmetro de translação  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}$ .

Com isso é possível definir as curvelets em função da posição  $x = (x_1, x_2)$ , na escala  $2^{-j}$ , com orientação  $\theta_l$  e posição  $x_k^{(j,l)} = R_{\theta_l}^{-1}(k_1 \cdot 2^{-j}, k_2 \cdot 2^{-j/2})$  como:

$$\varphi_{j,l,k}(x) = \varphi_{j,0,0}(R_{\theta_l}(x - x_k^{(j,l)})), \quad (3.6)$$

na qual  $R_\theta$  é matriz de rotação, rotacionada por  $\theta$  radianos. Sendo  $R^{-1}$  sua inversa, temos que:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta^{-1} = R_\theta^T = R_{-\theta}. \quad (3.7)$$

Um coeficiente curvelet é obtido pelo produto escalar entre um elemento  $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  e uma Curvelet  $\varphi_{j,l,k}$ ,

$$\mathcal{C}(j, l, k) := \langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\varphi_{j,l,k}(x)} dx. \quad (3.8)$$

Como a curvelet é definida no domínio da frequência, é possível aplicar o Teorema de Plancherel de modo a expressar o produto interno na forma de uma integral no domínio da frequência:

$$\mathcal{C}(j, l, k) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\varphi}_{j,l,k}(x)} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}(\omega) U_j(R_{\theta_l, \omega}) e^{\langle x_k^{(j,l)}, \omega \rangle} d\omega. \quad (3.9)$$

Assim como a TW 2D, a curvelet possui elementos representando escalas mais "grosseiras", formada por elementos não direcionais. Estes são obtidos por uma janela passa-baixa  $W_0$ , de modo que:

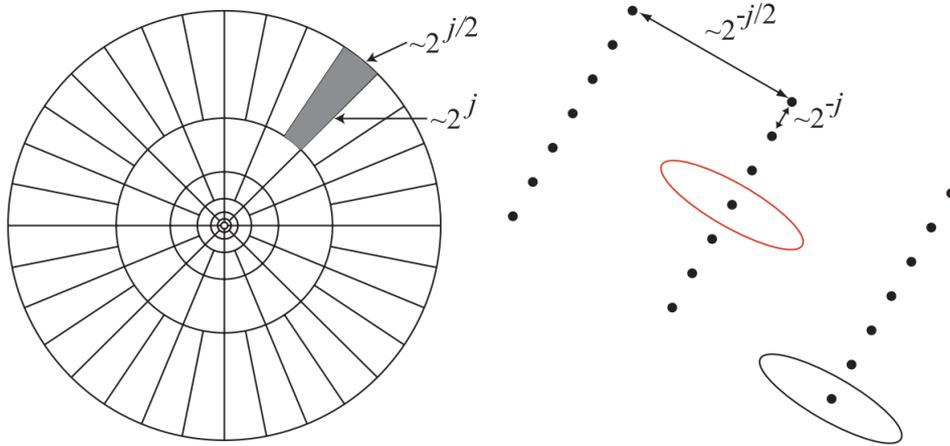
$$|W_0(r)|^2 + \sum_{j \geq 0} |W_0(2^{-j}r)|^2 = 1, \quad (3.10)$$

e para a posição  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  e elementos curvelet "grosseiros" são definidos como:

$$\varphi_{j_0, k}(x) = \varphi_{j_0}(x - 2^{-j_0}k), \quad \hat{\varphi}_{j_0, k}(\omega) = 2^{-j_0} W_0(2^{-j_0}|\omega|). \quad (3.11)$$

A TC completa é composta por elementos "finos" em escalas direcionais  $(\varphi_{j,l,k})_{j \geq j_0, l, k}$  e por *wavelets* não-direcionais  $(\Psi_{j_0, k})_k$ . A Figura 14 ilustra a concepção da curvelet no plano da frequência e cartesiano, note que o suporte dado escalonamento parabólico é mantido em ambos os casos.

Figura 14: (a) Segmentação do domínio da frequência, sendo a área sombreada a janela para uma dada curvelet e (b) plano cartesiano relacionada a formação de uma curvelet.



Fonte: Modificado, Candès et al. (2006).

Com base nas definições da TC descritas até agora, podemos listar algumas de suas propriedades:

1. **Tight Frame.** Assim como para um base ortonormal, é possível expandir a função  $f(x_1, x_2) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  como uma série de curvelets (incluindo elementos "grosseiros") com a formula de reconstrução:

$$f = \sum_{j,l,k} \langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle \varphi_{j,l,k}, \quad (3.12)$$

assegurando igualdade em termos de  $\mathbb{L}^2$  e o Teorema de Parseval:

$$\sum_{j,l,k} |\langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad (3.13)$$

2. **Escalonamento parabólico.**  $\varphi_j(x)$  apresenta um decaimento acentuado se afastando de um retângulo de dimensões  $2^{-j}$  por  $2^{-j/2}$  com o eixo mais longo orientado verticalmente. Efetivamente o comprimento e largura obedecem a relação:

$$\text{largura} \approx 2^{-j/2}, \quad \text{comprimento} \approx 2^{-j} \rightarrow \text{largura} \approx \text{comprimento}^2. \quad (3.14)$$

3. **Comportamento oscilatório.** Por definição,  $\hat{\varphi}_j$  é suportado distante dos eixos  $\omega_1 = 0$ , porém

próximo ao eixo horizontal  $\omega_2 = 0$ . De forma simplificada,  $\varphi_{j,0,0}(x)$  oscila na direção  $x_1$  e passa-baixa em  $x_2$ . Desta forma, uma Curvelet na escala  $2^{-j}$  tem uma forma de onda plana alongada, cujo o envelope é definido por uma cunha de comprimento  $2^{-j/2}$  e largura  $2^{-j}$ , apresentado oscilações perpendicularmente a cunha.

4. **Momentos Nulos.** A curvelet possui  $q$  momentos nulos quando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x_1, x_2) x_1^n dx_1 = 0, \quad \text{para todo } 0 \leq n < q, \quad \text{para todo } x_2. \quad (3.15)$$

O mesmo se aplica a uma curvelet rotacionadas quando  $x_1$  e  $x_2$  são postos em suas respectivas coordenadas. Ressaltando que a integral na Equação 3.15 é feita na direção  $x_1$ , perpendicular a orientação da cunha, de modo que os momentos nulos quantificam a propriedade oscilatória mencionada no item 3. No domínio de Fourier, a Equação 3.15 se torna uma linha de zeros, na forma:

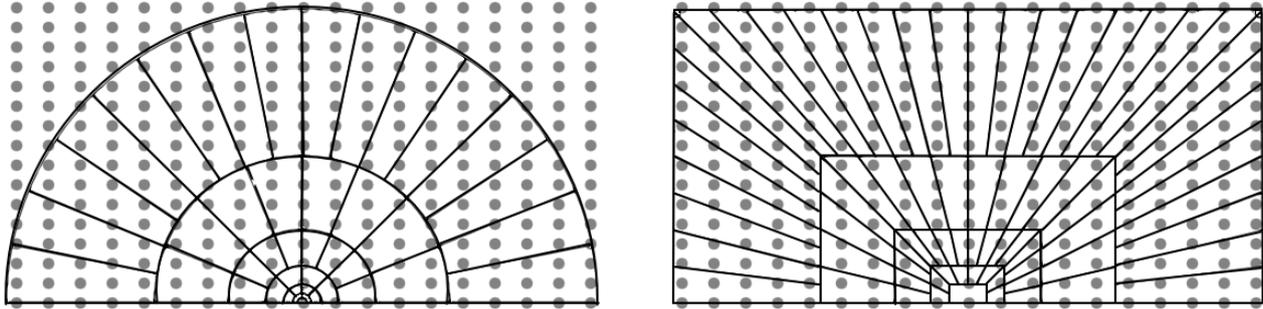
$$\frac{\partial^n \hat{\varphi}_j}{\partial \omega_1^n}(0, \omega) = 0, \quad \text{para todo } 0 \leq n < q, \quad \text{para todo } \omega_2. \quad (3.16)$$

Como definidas aqui, curvelets possuem infinitos momentos nulos já que possuem suporte compacto no domínio da frequência.

### 3.2 Transformada Curvelet Discreta via wrapping

Assim como definida no domínio contínuo, curvelets baseiam-se em círculos concêntricos e rotações, cuja aplicação não é adaptável ao plano cartesiano (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010). Por meio da discretização, uma imagem é composta por um conjunto de pontos amostrais esparsados em um grid regular. Sendo coronas concêntricas (Figura 15a) não são suportadas, o que faz necessário a substituição por uma estrutura pseudo-polar de retângulos concêntricos (Figura 15b).

Figura 15: Pontos cinzas representando átomos de uma imagem discretizada e segmentados por: (a) coronas concêntricas e (b) retângulos concêntricos.



Fonte: O autor.

Desta maneira, Candès et al. (2006) propulsaram duas implementações para a discretização pseudo-polar no domínio da frequência e aplicação da TC, sendo elas: não-equidistante FFT (USFFT) e *wrapping*. Essencialmente, estas se diferem na forma a qual a curvelet em uma dada escala e ângulo é transladada em respeito as demais. Na USFFT o grid da translação é inclinado de modo que o mesmo se alinhe a orientação da curvelet, obtendo-se uma discretização mais próxima a definição contínua. Em contrapartida, o *wrapping* aplica um único grid para cada ângulo em um mesmo quadrante com a curvelet mantendo sua orientação correta. Desta forma a obtenção TC via *wrapping* é mais simplificada e conseqüentemente mais rápida.

De acordo com Equação 3.4, a janela  $U_j$  extrai frequências próximas as coronas diádica  $\{2^j \leq r \leq 2^{j+1}\}$  e próxima ao ângulo  $\{-\pi \cdot 2^{-j/2} \leq \theta \leq \pi \cdot 2^{-j/2}\}$ . A "corona cartesiana" é baseada em quadrados concêntricos e cisalhamentos. Sendo assim, o análogo da janela  $(W_j)_{j \geq 0}$ ,  $W_j(\omega) = W(2^{-j}\omega)$ , é expresso como:

$$\tilde{W}(\omega) = \sqrt{\Phi_{j+1}^2(\omega) - \Phi_j^2(\omega)}, \quad j \geq 0, \quad (3.17)$$

na qual  $\Phi$  é definido como o produto entre duas janelas de frequência passa-baixa, e unidimensionais, na forma:

$$\Phi_j(\omega_1, \omega_2) = \phi(2^{-j}\omega_1)\phi(2^{-j}\omega_2). \quad (3.18)$$

Sendo  $0 \leq \phi \leq 1$ , podendo ser igual a 1 em  $[-1/2, 1/2]$ , e possuir pontos nulos fora de  $[-2, 2]$ .

Similar a Equação 3.10, temos que :

$$\phi_0(\omega)^2 + \sum_{j \geq 0} \tilde{W}_j^2(\omega) = 1. \quad (3.19)$$

Em seguida, definimos a janela angular na forma:

$$V_j(\omega) = V(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_2 / \omega_1). \quad (3.20)$$

Combinando  $\tilde{W}_j$  e  $V_j$ , obtém-se a janela discreta como:

$$\tilde{U}_j(\omega) := \tilde{W}_j(\omega)V_j(\omega). \quad (3.21)$$

Deste modo  $\tilde{U}_j$  isola frequências próximas a cunha  $\{(\omega_1, \omega_2) : 2^j \leq \omega_1 \leq 2^{j+1}, -2^{-j/2} \leq \omega_2 \omega_1 \leq 2^{-j/2}\}$  cuja definição é o equivalente da janela polar, como foi mostrada na Equação 3.4 . Assim, é introduzida a série de inclinações equidistantes  $\tan \theta_l := l \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}, l = -2^{\lfloor j/2 \rfloor}, \dots, 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} - 1$ .

Reescrevendo a Equação 3.21 temos:

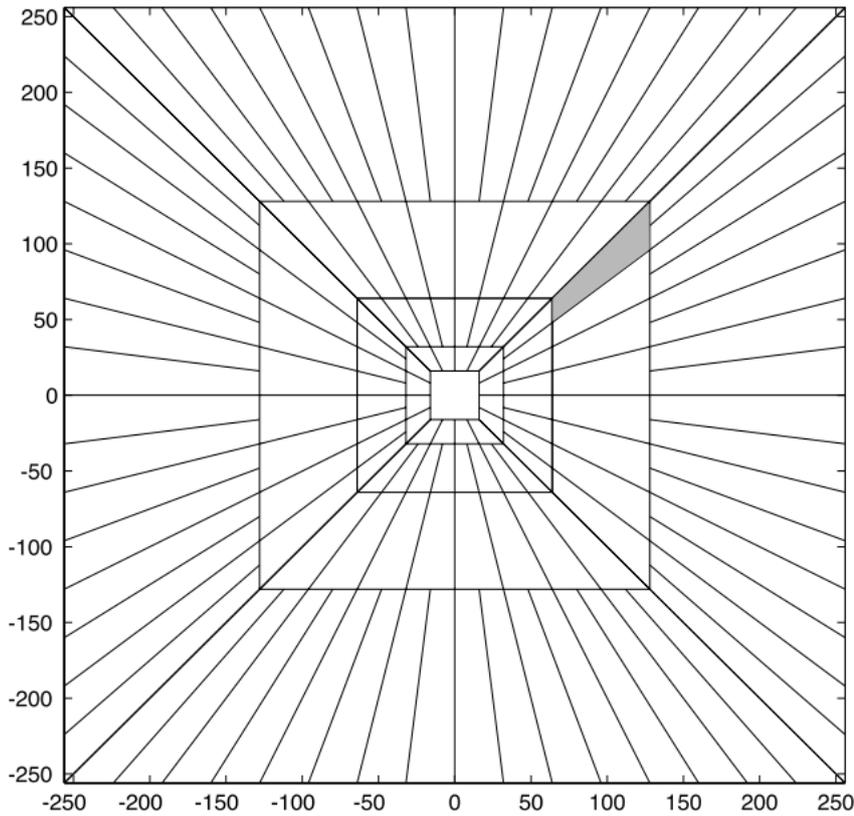
$$\tilde{U}_j(\omega) := \tilde{W}_j(\omega)V_j(S_{\theta_l}\omega), \quad (3.22)$$

na qual  $S_{\theta_l}$  é a matriz de cisalhamento:

$$S_{\theta_l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tan \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Os ângulos  $\theta_l$  não são equidistantes, mas sim suas inclinações. Quando a simetria é finalizada ao redor da origem e rotacionada por  $\pm\pi/2$  rad, a janela  $\tilde{U}_{j,l}$  (Figura 16) define o análogo cartesiano de  $U_j(R_{\theta_l}\omega)$ .

Figura 16: Segmentação do plano de Fourier no domínio discreto, baseado em quadrados concêntricos, onde a área sombreada representa uma dada curvelet.



Fonte: Modificado, Candès et al. (2006).

Seja  $V_j(S_{\theta_l}\omega) = V(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_2 / \omega_1 - l)$  e para cada  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , com  $\omega_1 > 0$ , similar a Equação 3.3, tem-se:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |V_j(S_{\theta_l}\omega)|^2 = 1. \quad (3.24)$$

Dadas as restrições do suporte da função  $V$ , o somatório acima se restringe aos ângulos de interesse  $-1 \leq \tan \theta_l < 1$ , respeitando a Equação 3.24, para  $\omega_2 / \omega_1 \in [-1 + 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}, 1 - 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}]$ . Portanto,

pela Equação 3.19 defini-se:

$$\sum_{l_0}^{l_{max}} \sum_{\theta_0}^{\theta_{max}} |\tilde{U}_{j,l}(\omega)|^2 = 1. \quad (3.25)$$

Esta segmentação pseudo-polar do domínio da frequência é utilizado para obter curvelets para cada escala e ângulo via *wrapping*. A curvelet, no plano cartesiano, é definida por:

$$\mathcal{C}(j, l, k) = \int \hat{f}(\omega) \tilde{U}_j(S_{\theta_l}^{-1}\omega) e^{i\langle b, \omega \rangle}, d\omega. \quad (3.26)$$

na qual  $b \simeq (k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j/2})$ , recebendo valores do grid retangular. Sendo  $b$  válido para  $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$  ou  $(3\pi/4, 5\pi/4)$ .

Defini-se um conjunto de pontos no plano cartesiano  $f[t_1, t_2], 0 \leq t_1, t_2 < n$ , e sendo  $\hat{f}[n_1, n_2]$  a TF 2D discreta na forma:

$$\hat{f}[n_1, n_2] = \sum_{t_1, t_2=0}^{n-1} f[t_1, t_2] e^{-i\pi(n_1 t_1 + n_2 t_2)}, \quad -n/2 \leq n_1, n_2 < n/2; \quad (3.27)$$

o qual dever ser visto como amostras:

$$\hat{f}[n_1, n_2] = \hat{f}(2\pi n_1, 2\pi n_2). \quad (3.28)$$

Pelo interpolador trigonométrico polinomial, tem-se que:

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{0 \leq t_1, t_2 \leq n} f[t_1, t_2] e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)/n}. \quad (3.29)$$

Assumindo que para  $\theta_l = 0$  a janela  $\tilde{U}_{j,l}[n_1, n_2] = \tilde{U}_j[n_1, n_2]$  é suportada por um retângulo de tamanho  $L_{1,j}$  por  $L_{2,j}$ :

$$\mathcal{P}_j = \{(n_1, n_2) : n_{1,0} \leq n_1 < n_{1,0} + L_{1,j} \quad , \quad n_{2,0} \leq n_2 < n_{2,0} + L_{2,j}\}, \quad (3.30)$$

na qual  $(n_{1,0}, n_{2,0})$  são os valores dos pixels no canto inferior esquerdo do retângulo. Devido ao escalonamento parabólico,  $L_{1,j}$  e  $L_{2,j}$  são aproximadamente  $2^j$  e  $2^{j/2}$ , respectivamente.

Um das consequências da aplicação via *wrapping* é que no plano da frequência, a janela  $\tilde{U}_{j,l}[n_1, n_2]$  não cabe no retângulo  $2^2 \times 2^{j/2}$  como posto na Equação 3.26. Após a discretização, a Equação 3.26 torna-se um somatório sobre  $n_1$  e  $n_2$  que se estendem além dos limites permitidos pela transformada inversa TF 2D aplicada. Pois, para  $\theta_l \neq 0$  a janela  $\tilde{U}_{j,l}[n_1, n_2]$  é suportada pela região paralelepipedal ( Figura 17), na forma:

$$\mathcal{P}_{j,l} = S_{\theta_l} \mathcal{P}_j. \quad (3.31)$$

Contudo, é possível periodizar as amostras de frequência de forma a adequar seu tamanho. Para escala  $j$  e orientação  $\theta_l$ , ao segmentar o plano com  $\mathcal{P}_{j,l}$ , por múltiplos de  $L_{1,j}$  na horizontal e  $L_{2,j}$  na vertical. A periodização correspondente do dado janelado  $\hat{f}[n_1, n_2] = \tilde{U}_{j,l}[n_1, n_2] \hat{f}[n_1, n_2]$  é descrita como:

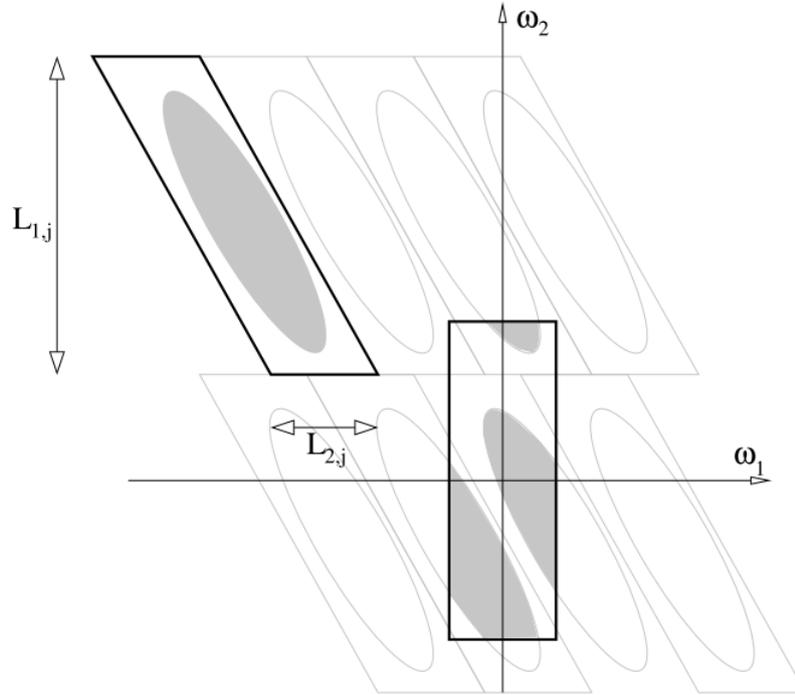
$$Wd[n_1, n_2] = \sum_{m_1 \in \mathbb{R}} \sum_{m_2 \in \mathbb{R}} d[n_{1,0} + L_{1,j} m_1, n_{2,0} + L_{2,j} m_2]. \quad (3.32)$$

O dado janelado "envolto"; ao redor da origem (por isso o nome *wrapping*) é definido como limites de  $Wd[n_1, n_2]$  para índices  $n_1, n_2$  dentro do retângulo  $L_{1,j} \times L_{2,j}$  próximo a origem:  $0 \leq n_1 + 1 < L_{1,j}$ ,  $0 \leq n_2 < L_{2,j}$  ( Figura 17).

Os índices  $(n_1, n_2)$  originalmente contidos em  $\mathcal{P}_{j,l}$  (possivelmente muito maiores que  $L_{1,j}, L_{2,j}$ ), são equivalentes aos índices "envoltos". O método via *wrapping* se postula como uma reindexação do dado, podendo ser expressado como:

$$Wd[n_1 \bmod L_{1,j}, n_2 \bmod L_{2,j}] = d[n_1, n_2]. \quad (3.33)$$

Figura 17: Paralelogramo  $\mathcal{P}_{j,l}$  no canto superior esquerdo, e seu equivalente "envolto" na origem na forma de um retângulo resultante da periodização.



Fonte: Modificado, (CANDÈS et al., 2006).

A concepção da TC via *wrapping* pode ser resumida pelos seguintes passos:

1. Aplicar a TF 2D e obter as amostras de Fourier  $\hat{f}[n_1, n_2]$ ,  $-n/2 \leq n_1, n_2 < n/2$ ;
2. Para cada escala  $j$  e ângulo  $l$  formar o produto  $\tilde{U}_{j,l}[n_1, n_2]\hat{f}[n_1, n_2]$ ;
3. Envolver este produto ao redor da origem e obter:

$$\tilde{f}_{j,l}[n_1, n_2] = W(\tilde{U}_{j,l}\hat{f})[n_1, n_2],$$

na qual  $n_1$  e  $n_2$  variam entre  $0 \leq n_1 < L_{1,j}$  e  $0 \leq n_2 < L_{2,j}$ , para  $\theta$  entre  $(-\pi/4, \pi/4)$ ;

4. Aplicar a TF 2D inversa para cada  $\tilde{f}_{j,l}$ , coletando os coeficientes discretos  $\mathcal{C}(j, l, k)$ .

Como consequência da utilização da TF como parte da TC há a condição implícita de periodicidade. Isto implica que os pixels nas colunas externas da imagem sejam considerados imediatamente vizinhos. Uma solução simples para este problema é estender a imagem com zeros em ambas as direções.

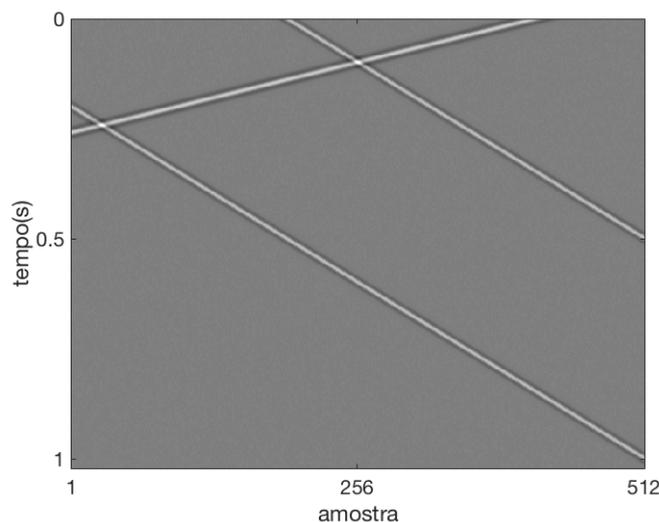
Outro fator limitante se apresenta na amostragem em escalas mais finas ( $j = j_{max}$ ), ou seja, nas regiões mais distantes da origem no plano da frequência. Caso curvelets muito "finas" estejam muito adensadas o efeito de pixelização faz com que a direção de oscilação não seja clara, resultando na criação de artefatos. Para casos como este, Candès et al. (2006) apresentam a utilização de *wavelets* com uma janela única, sem componentes direcionais. Na escala mais fina, as curvelets apresentam redundância de 7.2 vezes o número de amostras, caso sejam utilizadas *wavelets* há redundância de 2.8 vezes.

### 3.3 Representação de Coeficientes Curvelet

Como já apresentado, a TC atua de forma a decompor uma imagem em função de coeficientes direcionais localizados. Contudo, dada inerente quantidade de coeficientes gerados pela transformada isto torna sua representação visual não trivial. Outros autores já apresentam formas de avaliar coeficientes curvelet (a exemplo Naghizadeh e Sacchi (2010), Oliveira et al. (2012), Gorrszczyk, Adamczyk e Malinowski (2014)) entretanto, estes não necessariamente conseguem representar o comportamento direcional ou apresentam coeficientes de forma decimada. Desta forma no presente trabalho é proposto uma distribuição dos coeficientes curvelet em função da escala e preservando sua orientação.

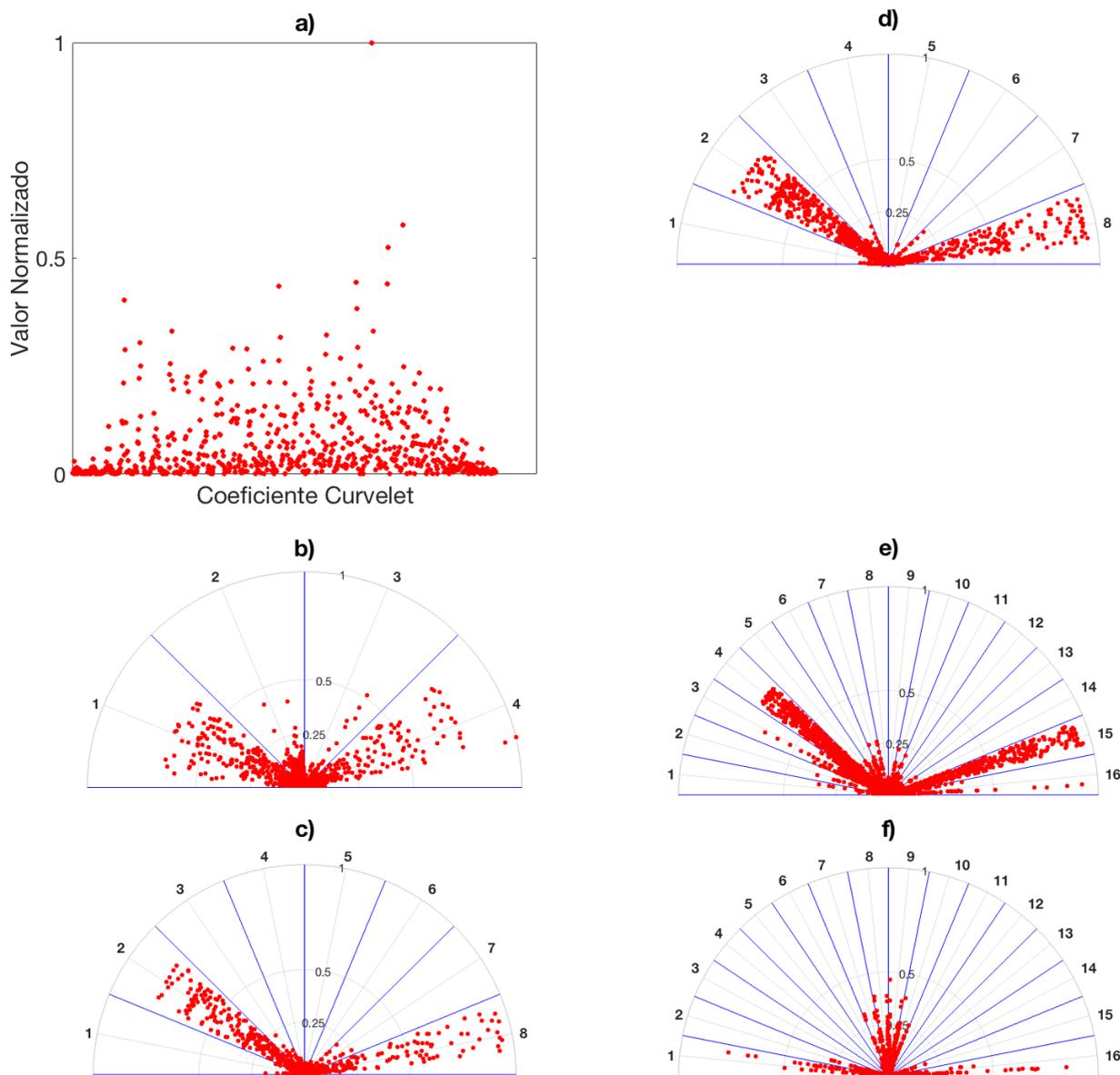
Utilizando como exemplo modelo sintético constituído de 3 eventos lineares (Figura 18), na qual é aplicada a TC utilizando 6 escalas sendo primeira escala isotrópica e as demais contento 4,8,8,16 e 16 direções. Com representação proposta, é possível identificar os eventos direcionais no domínio da imagem sendo representados por seus respectivos coeficientes da TC. Para a escala  $j = 2$  destacam-se as sub-bandas  $l = 1$  e  $l = 4$  (Figura 19b). Já nas escala  $j = 3$  e  $j = 4$  os eventos lineares são definidos pelas sub-bandas  $l = 2$  e  $l = 8$  (Figura 19c-d). Para a escala  $j = 5$  destacam-se as sub-bandas  $l = 4$  e  $l = 15$  (Figura 19e), sendo a escala  $j = 6$  não aparenta direta correlação com os eventos (Figura 19f)

Figura 18: Modelo sintético contendo três eventos lineares.



Fonte: O autor.

Figura 19: Distribuição dos coeficientes curvelet para o modelos sintético contendo três eventos lineares, para a escala a)  $j = 1$ , b)  $j = 2$ , c)  $j = 3$ , d)  $j = 4$ , e)  $j = 5$  e f)  $j = 6$



Fonte: O autor.

Cabe ressaltar que a presente representação dos coeficientes curvelet contempla somente o comportamento direcional por escala. Sendo assim, a relativa posição de dois eventos com mesma direção, como no modelo sintético apresentado, apenas contribuem para uma mesma sub-escala.

### 3.4 Método de Filtragem dos Coeficientes Curvelet via Bayes

A atenuação do ruído é uma das principais funções do processamento sísmico, visando aprimorar a razão sinal-ruído (S/N). Segundo Yilmaz (2001), o ruído sísmico pode ser classificado em dois tipos: aleatório e coerente. O ruído aleatório tem como característica a não correlação entre traços e variação no tempo. Já o ruído coerente apresenta correlação entre os traços sísmicos, a exemplo os efeitos associados ao *ground-roll* (GR).

Por ser uma representação esparsa, os coeficientes curvelet que representam estruturas coerentes podem ser distinguidos daqueles que contêm apenas ruído. Deste modo, a filtragem dos coeficientes curvelet pode ser feita através do método de truncamento (MALLAT, 1999). Assumindo que o ruído possua uma distribuição do tipo Gaussiana ( $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ), podemos representar o problema na forma:

$$D_{obs} = D + \sigma_r \varepsilon,$$

na qual  $D$  é a imagem original,  $D_{obs}$  o dado observado e  $\sigma_r$  o desvio padrão do ruído.

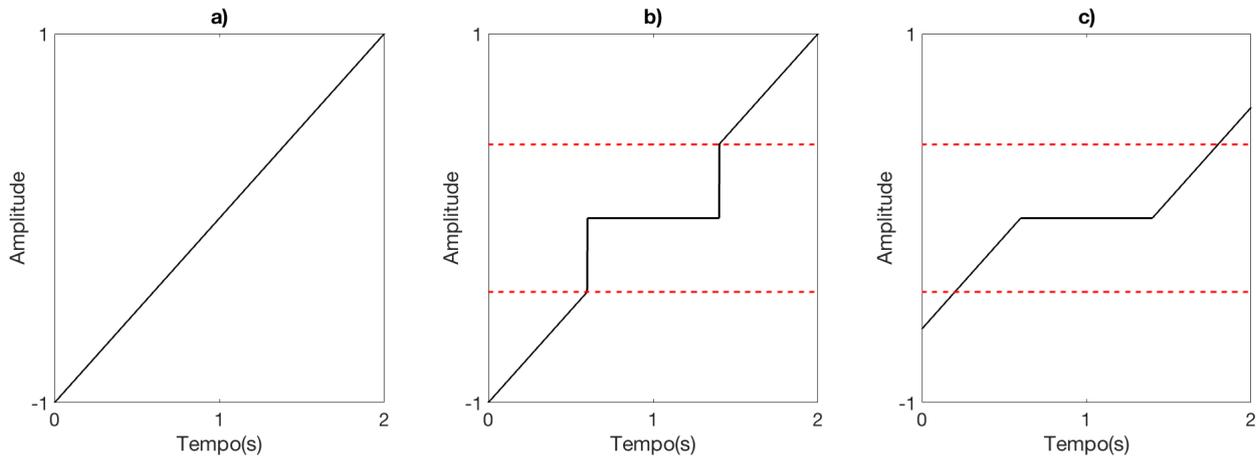
A técnica de truncamento consiste em recuperar  $D$  a partir daqueles coeficientes que contenham informações relevantes ao dado (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010). Esta técnica pode ser aplicada de duas formas: abrupto ou suave. No truncamento abrupto, aqueles coeficientes cuja magnitude seja menor que um patamar ( $\lambda$ ) definido são zerados (Figura 20b), na forma:

$$C_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} & \text{se } |C_{i,j}| \geq \lambda, \\ 0 & \text{se } |C_{i,j}| < \lambda. \end{cases} \quad (3.34)$$

Já o truncamento suave (Figura 20b) consiste em reduzir coeficientes com valores próximos a  $\lambda$  em direção a origem na forma:

$$C_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} - \lambda & \text{se } |C_{i,j}| > \lambda; \\ C_{i,j} + \lambda & \text{se } |C_{i,j}| < -\lambda; \\ 0 & \text{se } |C_{i,j}| \leq \lambda. \end{cases} \quad (3.35)$$

Figura 20: Em (a) um sinal linear, (b) aplicado o truncamento abrupto e (c) aplicado truncamento suave.



Fonte: O autor.

A escolha entre o tipo de truncamento está relacionada ao tratamento que se deseja aplicar ao dado (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010). Em geral, a literaturara sobre processamento de imagens indica o truncamento suave como o mais recorrente (DONOHO, 1993; MALLAT, 1999; CHANG; YU; VETTERLI, 2000; STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010), em contrapartida o mesmo tende a reduzir as amplitudes e suavizar discontinuidades. Em vista disto, para aplicações em dados sísmicos o truncamento abrupto possui a vantagem de remover o sinal do ruído, preservando as amplitudes e discontinuidades (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010).

Métodos para definir o parâmetro  $\lambda$  são em sua maioria oriundos de aplicações no domínio *wavelet* ( *e.g.* Donoho (1993), Donoho e Johnstone (1995)), podendo também ser adaptados na seleção de coeficientes curvelet. O método utilizado neste trabalho é chamado truncamento via Bayes, proposto inicialmente por Chang, Yu e Vetterli (2000), aplicado ao domínio *wavelet*. Comparativamente a outros métodos de truncamento este se mostra mais robusto, pois sua aplicação é derivada diretamente do dado (GOMES, 2017). O truncamento Bayes é feito em função do desvio padrão do ruído ( $\sigma_r$ ) e da variância do dado ( $\sigma_D^2$ ) no domínio curvelet sendo de acordo com a escala ( $j$ ) e sub-escala ( $l$ ), definido

por:

$$\lambda_{j,l} = \frac{\sigma_r^2(j,l)}{\sigma_D(j,l)}. \quad (3.36)$$

A aplicação do truncamento é adaptativa de acordo com a cada escala e direção no domínio curvelet, sendo a estimativa de  $\sigma_r$  é feita por escala em cada sub-banda. Para tal, Donoho e Johnstone (1995) propõem uma estimativa robusta pela distribuição absoluta dos coeficientes por:

$$\tilde{\sigma}_r(j,l) = \frac{MAD(C_{j,l})}{0.6745} = \frac{Mediana[|C_{j,l} - Mediana(C_{j,l})|]}{0.6745}. \quad (3.37)$$

Já o desvio padrão do dado pode ser obtido por:

$$\sigma_D(j,l) = \sqrt{\max(\sigma_D^2(j,l) - \sigma_r^2, 0)}, \quad (3.38)$$

na qual  $\sigma_D^2(i,j)$  é dado por:

$$\sigma_D^2(j,l) = \frac{1}{n} \sum_1^n C_{j,l,\omega_1,\omega_2}^2, \quad (3.39)$$

sendo  $n$  a dimensão da respectiva matriz da sub-banda  $l$  no domínio curvelet.

No presente trabalho é utilizado uma versão modificada da Equação 3.36, com a inserção de uma constante definida pelo usuário  $\alpha_{j,l}$ . Esta constante permiti a ponderação do nível de truncamento em determinada escala  $j$  e direção  $l$ , na forma:

$$\lambda_{j,l} = \alpha_{j,l} \frac{\sigma_r^2}{\sigma_D(i)}. \quad (3.40)$$

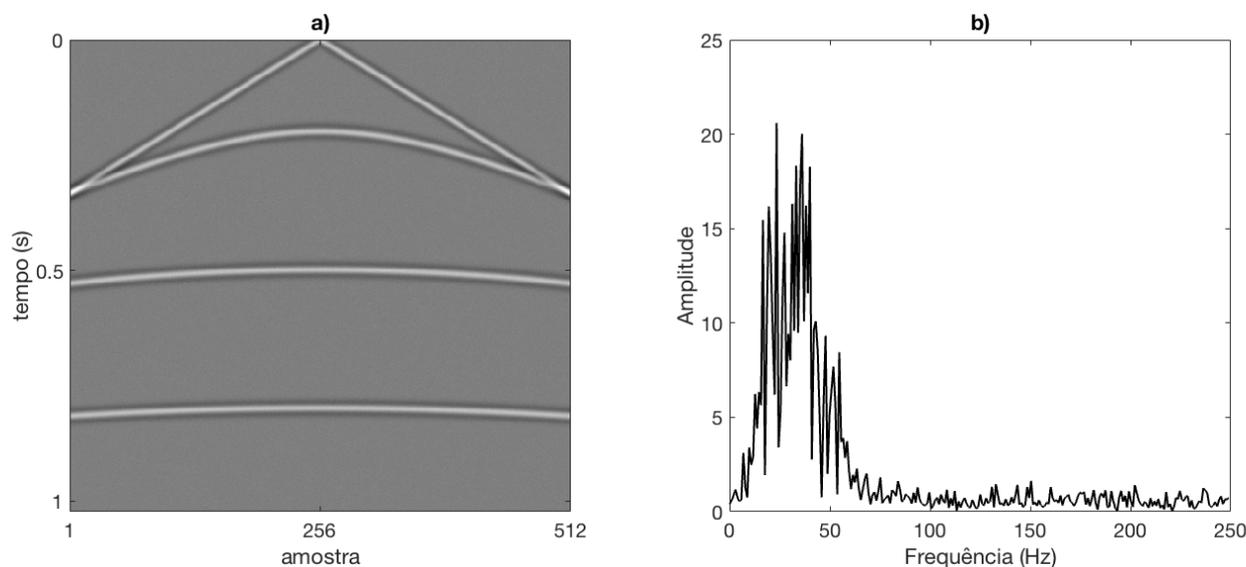
## 4 Aplicação da Transformada Curvelet a Dados Sísmicos

Para demonstrar a capacidade de processamento da transformada curvelet foram elaborados 2 ensaios. O primeiro, consiste de um modelo sintético, visando avaliar o comportamento dos coeficiente curvelet perante a presença de ruídos controlados de características distintas. No segundo, a metodologia é aplicada a um dado terrestre disponibilizado pelo Serviço Geológico dos Estados Unidos (*USGS*) visando para a remoção de *ground-roll* via transformada curvelet.

### 4.1 Modelos sintéticos

Como base para os testes controlados foi elaborado um modelo sintético do tipo convolucional, com dimensões de  $512 \times 512$  amostras em cada eixo (Figura 21a), utilizando a biblioteca *SeismicLab* (disponível em : <http://www.seismic-lab.physics.ualberta.ca>). Este modelo simula um arranjo sísmico do tipo tiro comum formado por três eventos hiperbólicos com velocidades de 1500 m/s, 2100 m/s, 2400 m/s, respectivamente. Também foi adicionado um evento linear, simulando uma onda direta. Todos eventos são modulados por uma *wavelet* do tipo Ricker, com frequência central 30Hz.

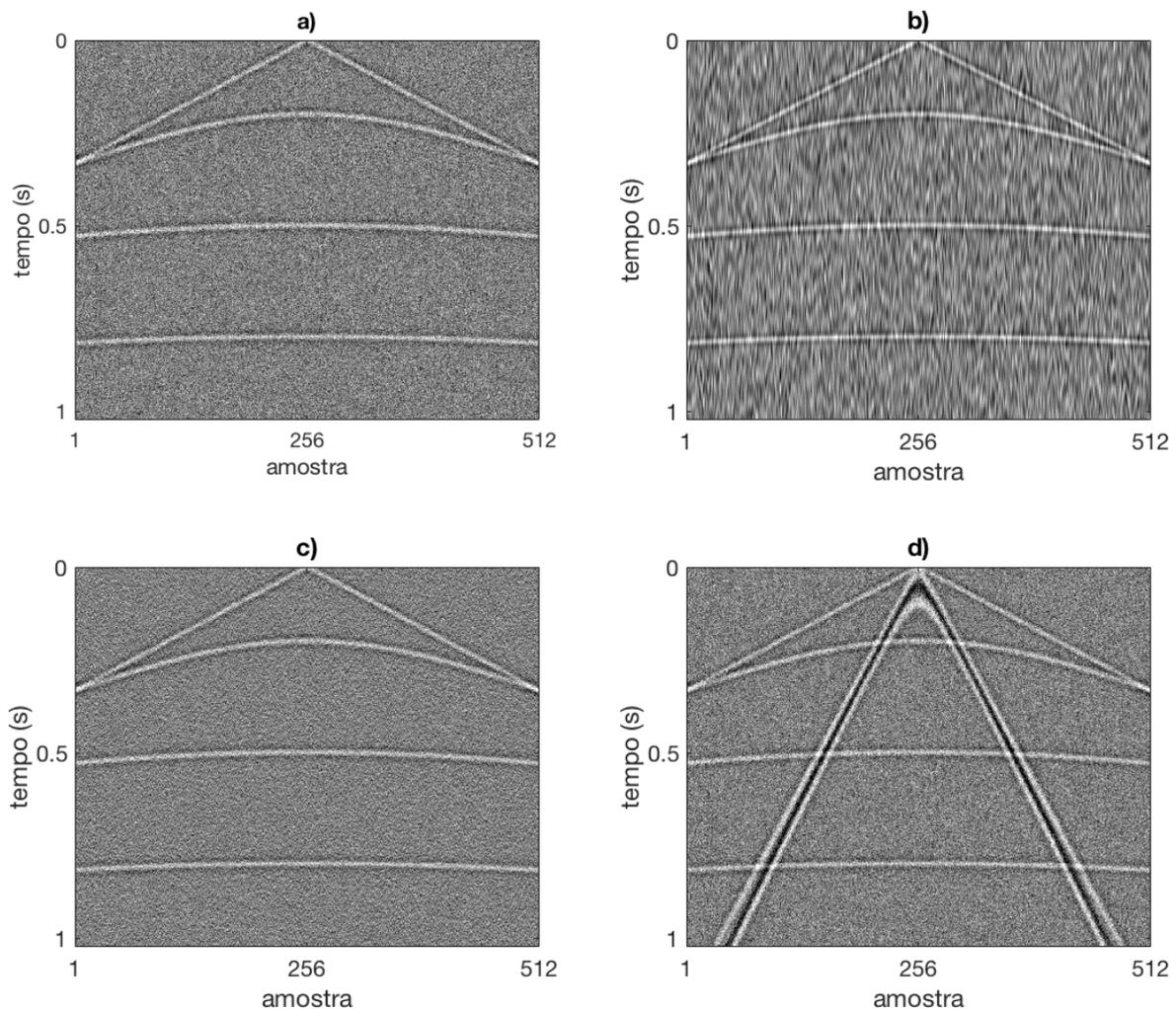
Figura 21: a) Modelo sintético base, e (b) o conteúdo de frequência para um traço do modelo sintético



Fonte: O autor.

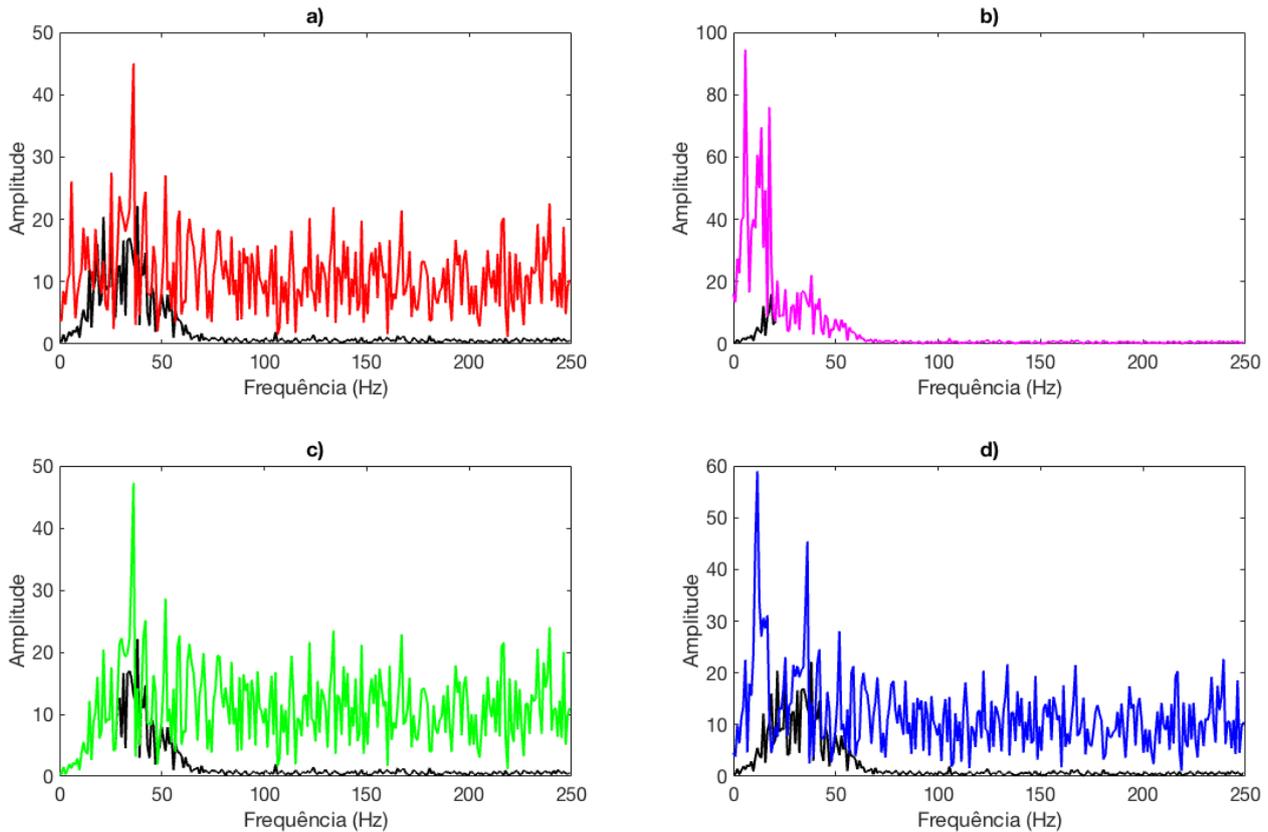
Para atestar a eficácia da transformada curvelet para remoção foram gerados 4 cenários com ruídos. O primeiro cenário é formado por ruído branco, com distribuição Gaussiana e desvio padrão de 0.5 (Figura 22a). O segundo cenário corresponde ao mesmo ruído branco filtrado para frequências entre 0 – 20 Hz (Figura 22b). O terceiro cenário segue o mesmo princípio do anterior, contudo filtrando para frequências superiores à 30 Hz (Figura 22c). Por ultimo, é modelado um ruído do tipo *ground-roll*(GR), com frequência central de 13 Hz e velocidade de 343 m/s, e com ruído branco (Figura 22d). Sendo os ruídos filtrados têm sua amplitude ajustada para que desvio padrão seja mantido em 0.5. Os espectros de amplitude dos respectivos modelos, comparados ao modelo original, são ilustrados na Figura 23.

Figura 22: Modelos sintéticos contaminados por: a) ruído branco, b) ruído de baixa frequência, c) ruído de alta frequência, d) ruído branco e GR.



Fonte: O autor.

Figura 23: Comparação entre espectro de amplitude para o modelo sintético original (em preto) e o dos modelo contaminado por: a) ruído branco (em vermelho); b) ruído de baixa (em roxo); c) ruído de alta (em verde); d) ruído branco e *GR* (azul).



Fonte: O autor.

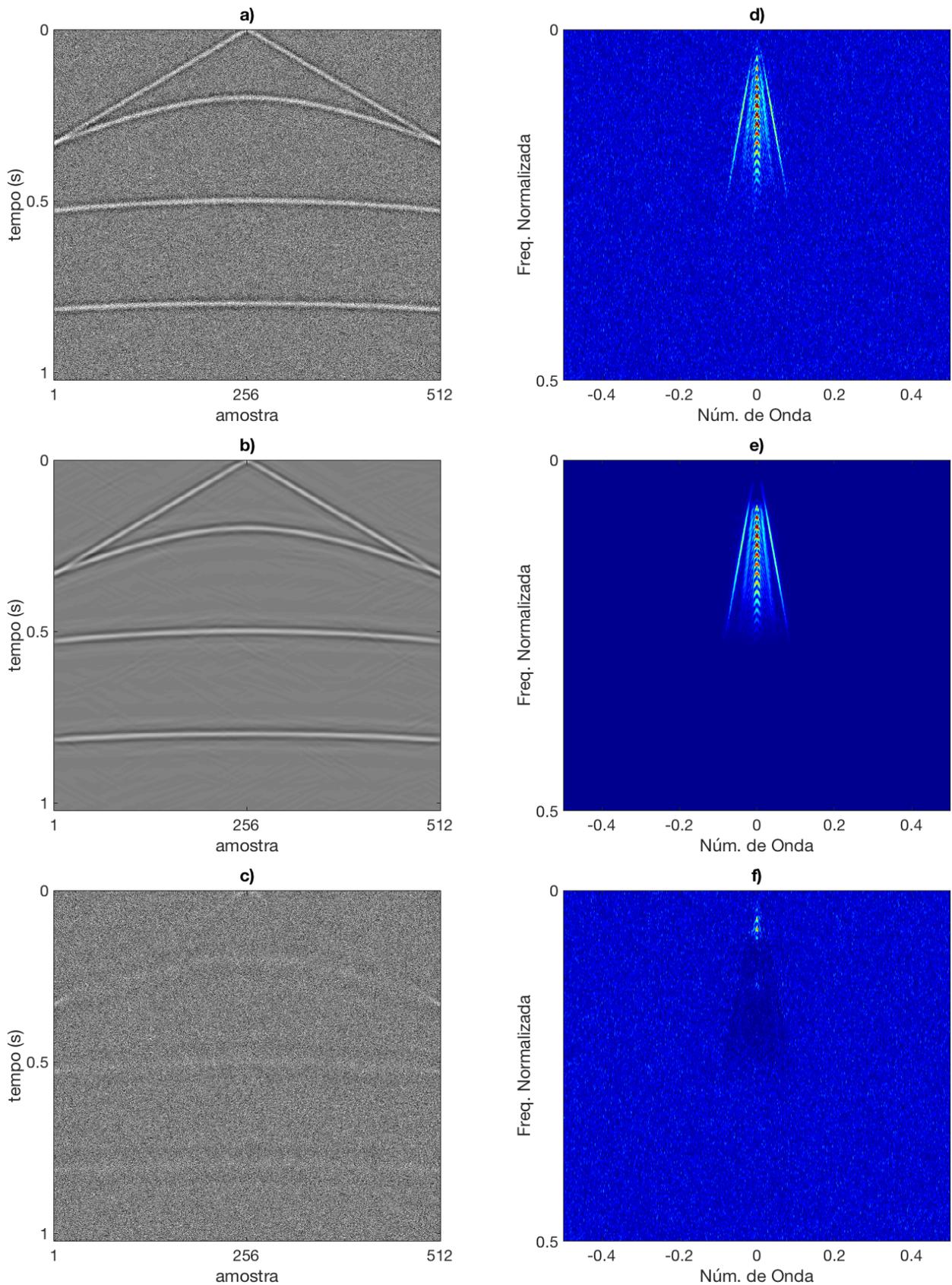
Após a modelagem dos ruídos sintéticos, é aplicada a transformada curvelet, utilizando a biblioteca *CurveletLab* (disponível em: <http://www.curvelet.org>) com 6 escalas, sendo a primeira escala isotrópica e as demais contendo 8,16,16,32 e 32 direções respectivamente. A fim de evitar o falseamento durante o processo de filtragem no domínio curvelet, todos modelos são acrescidos de uma borda de zeros estendendo em 1/4 em todas as direções. Com isso qualquer efeito de falseamento nas bordas é posteriormente removido, voltando o modelo ao seu tamanho original.

Busca-se no domínio curvelet identificar os distintos tipos de ruído em cada modelo, e através do truncamento Bayes filtrar o dado, sendo o parâmetro  $\alpha_{i,l}$  ajustado para a intensidade da filtragem por escala ( $j$ ) e sub-escala ( $l$ ). Para a remoção do ruído branco (Figura 24a), a melhor performance do truncamento foi obtida utilizando a constante  $\alpha = 2$  em todas as escalas (Figura 24b). É possível destacar a remoção do ruído na imagem residual (Figura 24c). Entretanto, parte da energia de baixa

frequência relativa as três hipérboles também foi removida, o que indica que o uma abordagem muito agressiva na baixa frequência . O mesmo pode ser notado no espectro FK antes (Figura 24d) e após a filtragem (Figura 24e), sendo a baixa frequência também destacada no resíduo (Figura 24f).

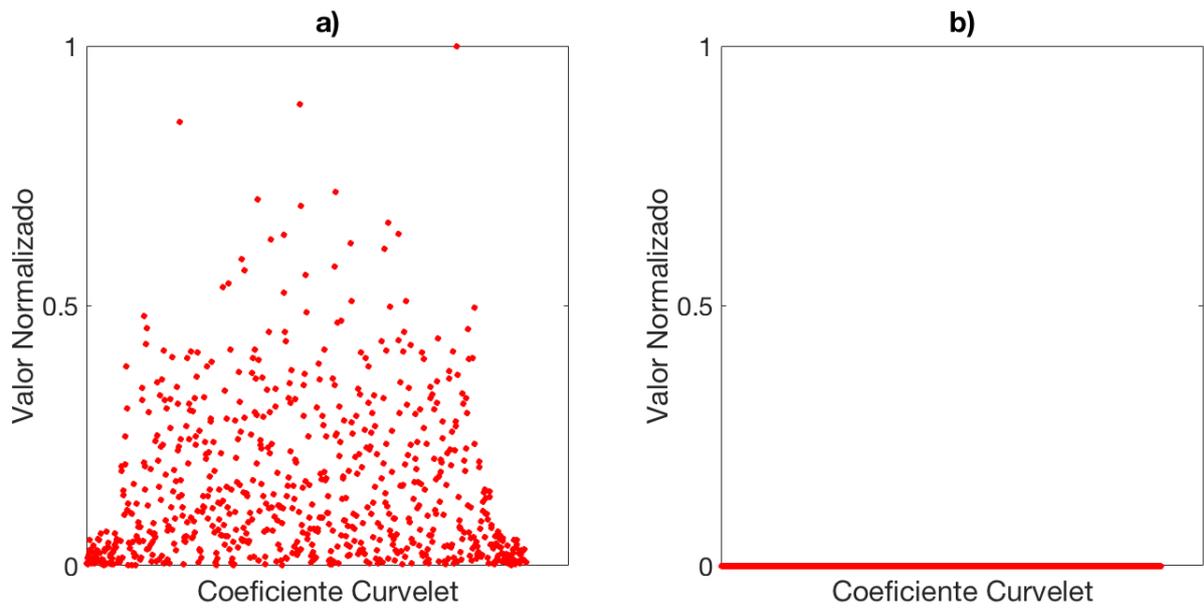
A análise dos coeficientes curvelets contaminados por ruído branco, normalizados e distribuídos por escala (Figuras 25a-30a) ,mostram o sinal melhor representados entre as escalas 2, 3 e 4. Nestes, os coeficientes apresentam direções condizentes com o dado, já as escalas 5 e 6 contêm essencialmente ruído. Após a filtragem, os coeficientes curvelets utilizados para a reconstrução da imagem são representados nas Figuras 25b-30b.

Figura 24: a) Modelo sintético com ruído branco; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet ;c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente.



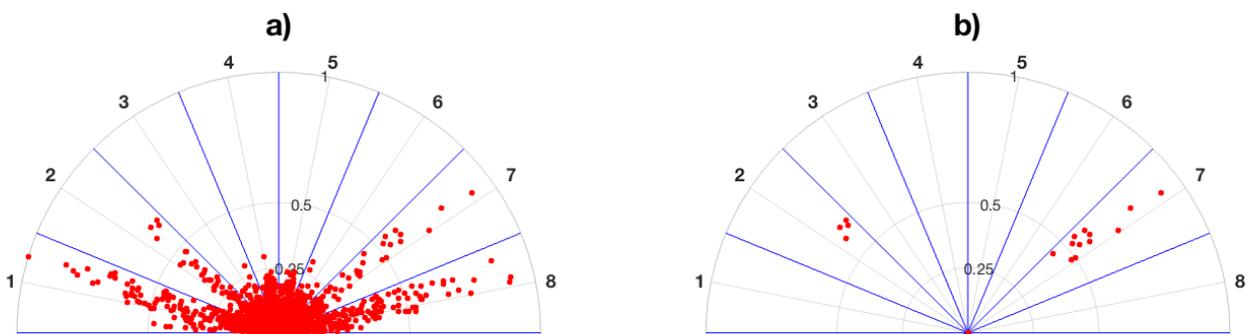
Fonte: O autor.

Figura 25: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 1$  para o modelo sintético com ruído de branco a) antes e b) após a filtragem.



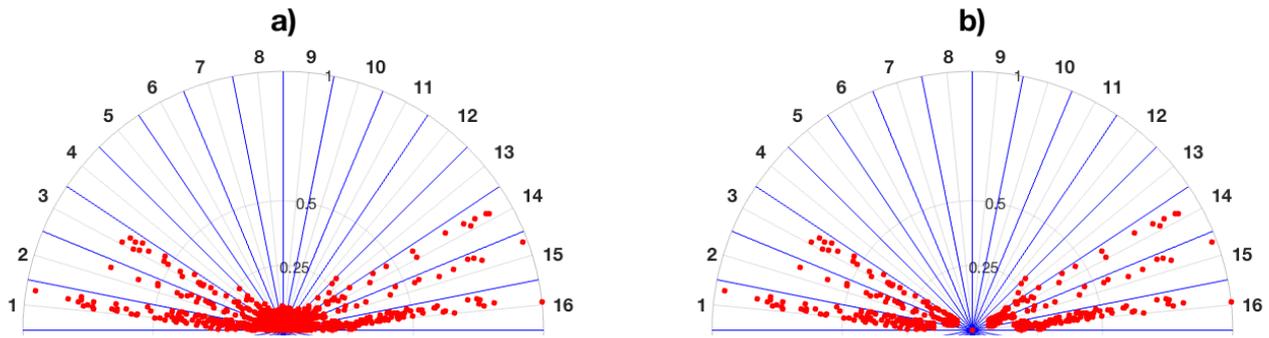
Fonte: O autor.

Figura 26: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 2$  para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem.



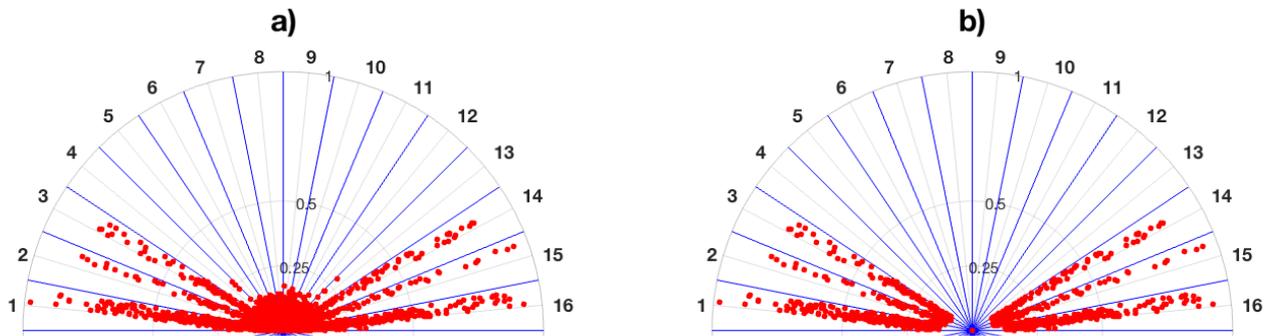
Fonte: O autor.

Figura 27: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 3$  para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem.



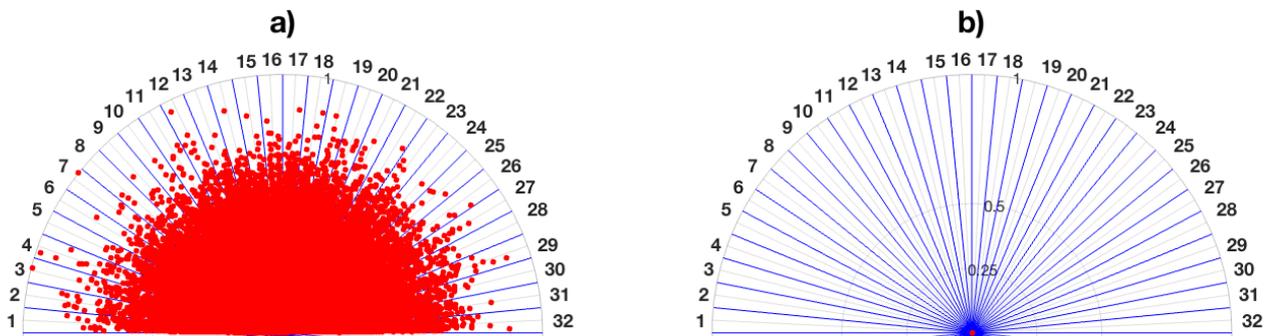
Fonte: O autor.

Figura 28: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 4$  para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem.



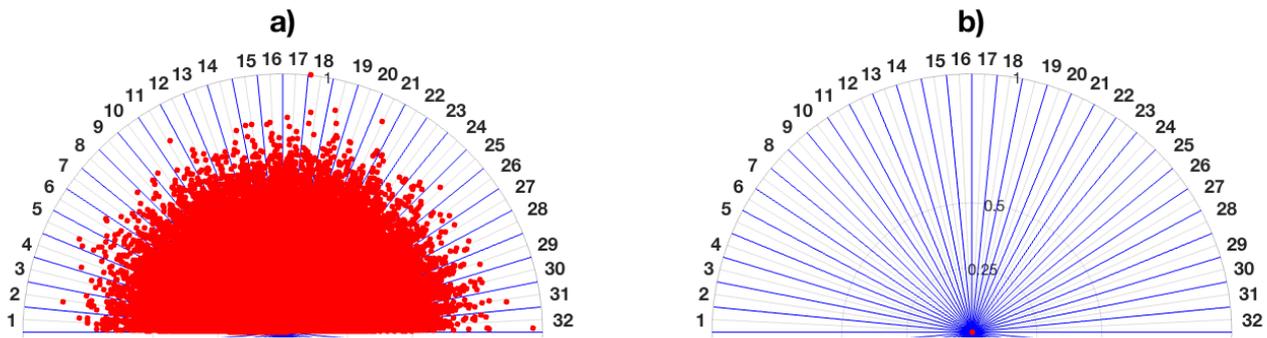
Fonte: O autor.

Figura 29: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 5$  para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem.



Fonte: O autor.

Figura 30: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 6$  para o modelo sintético com ruído branco: a) antes e b) após a filtragem.

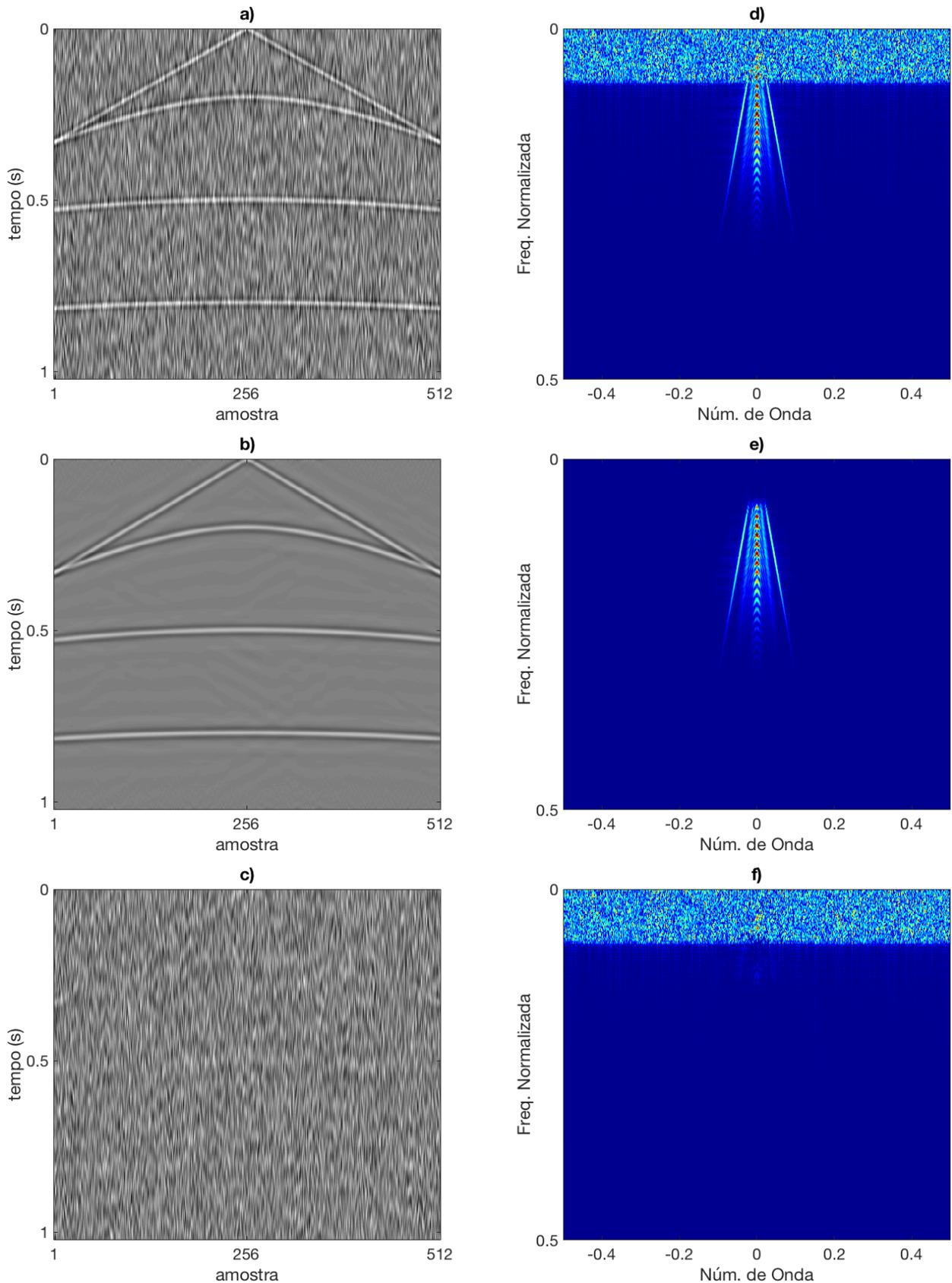


Fonte: O autor.

Para o modelo contendo ruído de baixa frequência (Figura 31a), ajustando a constante  $\alpha = 1,5$  foi a melhor ajustada para a remoção do ruído (Figura 31b). Analisando o perfil FK antes (Figura 31d) e após a filtragem (Figura 31e), o resíduo removido está concentrado principalmente na baixa frequência (Figura 31f).

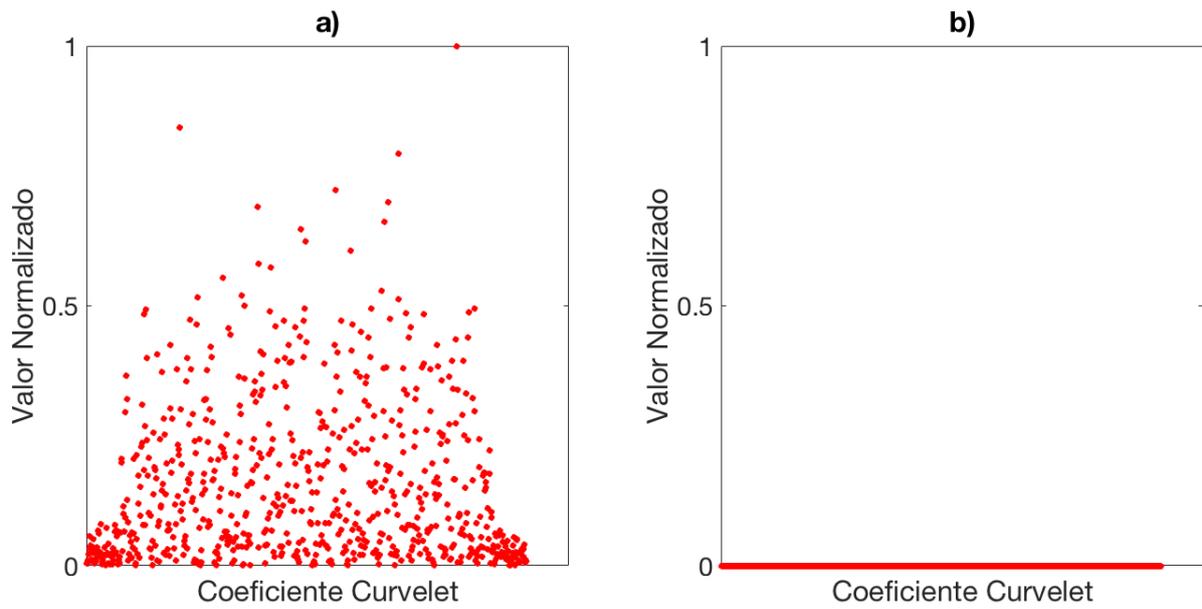
Diferentemente do modelo anterior, os coeficientes curvelet mais contaminados por ruídos estão na escala 2 (Figura 33a), o que se confirma após a filtragem (Figura 33b). Já as demais escalas (Figura 34a-37a) apresentam coeficientes concentrados próximos a vertical, sendo os mesmos removidos após a filtragem (Figura 34b-37b). Pelo resíduo da filtragem (Figura 31c) este é novamente composto essencialmente por ruído.

Figura 31: a) Modelo sintético com ruído de baixa frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente.



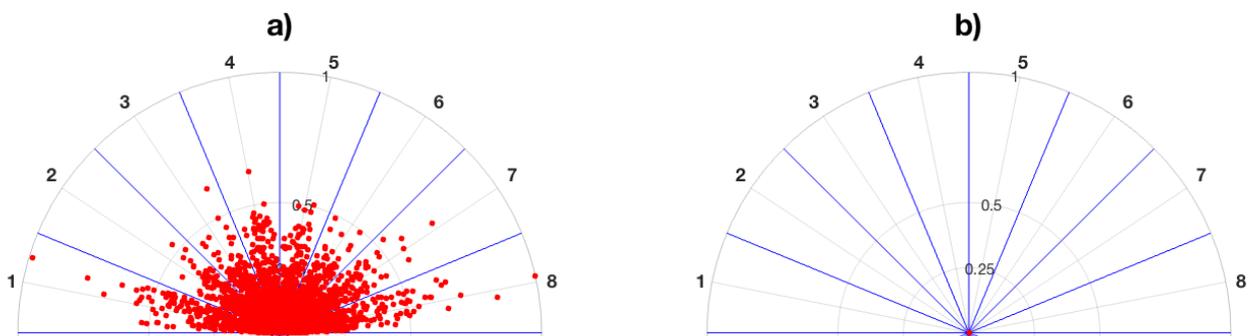
Fonte: O autor.

Figura 32: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 1$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.



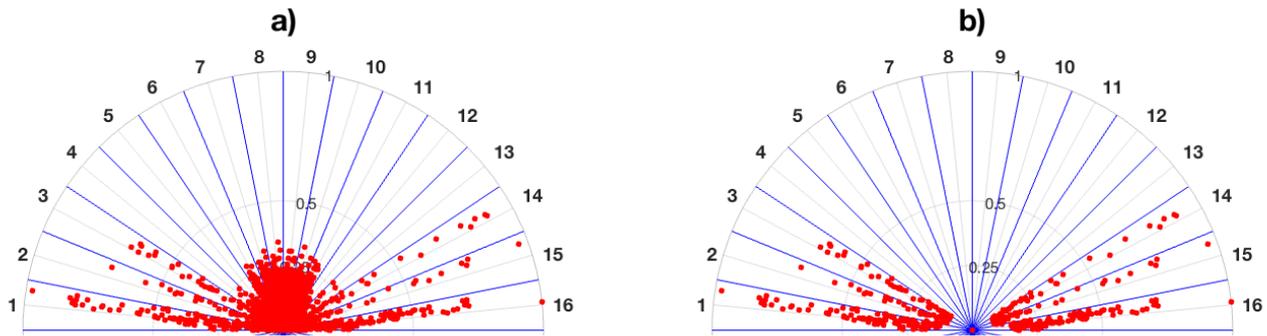
Fonte: O autor.

Figura 33: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 2$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.



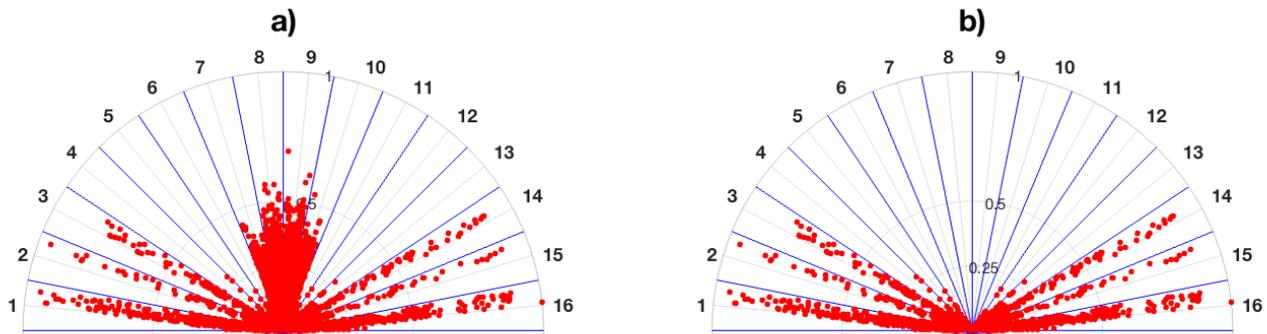
Fonte: O autor.

Figura 34: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 3$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.



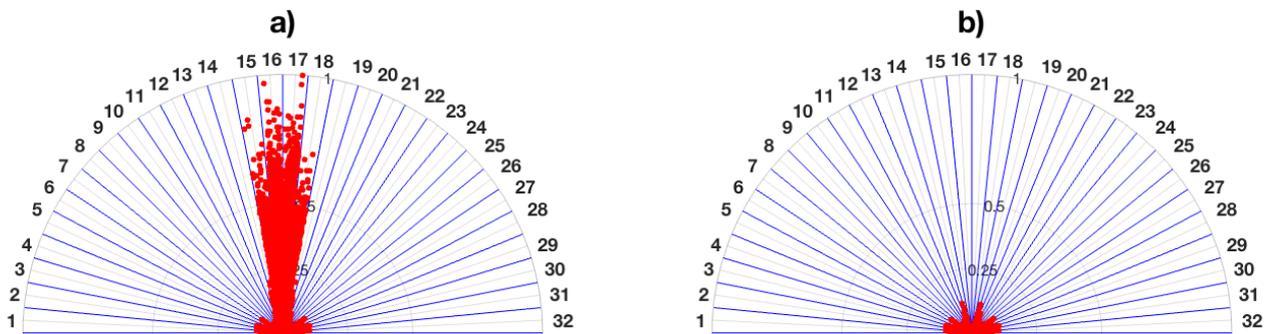
Fonte: O autor.

Figura 35: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 4$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.



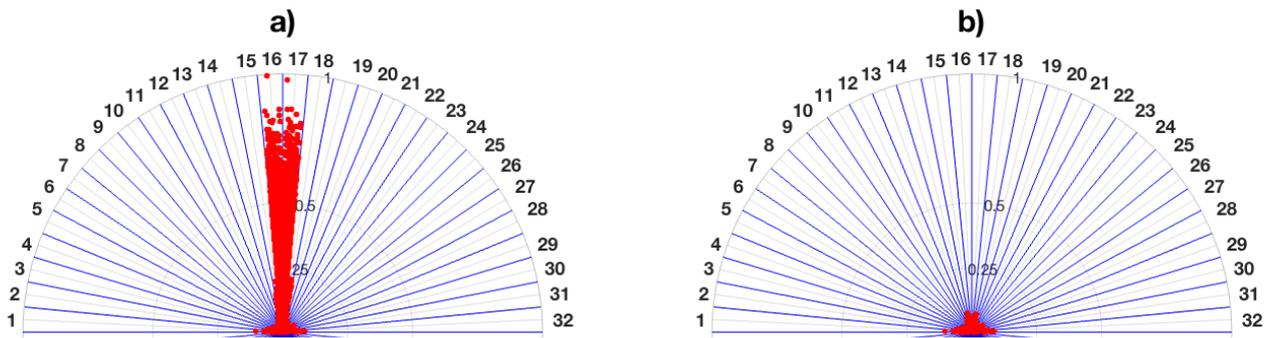
Fonte: O autor.

Figura 36: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 5$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.



Fonte: O autor.

Figura 37: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 6$  para o modelo sintético com ruído de baixa frequência: a) antes e b) após a filtragem.

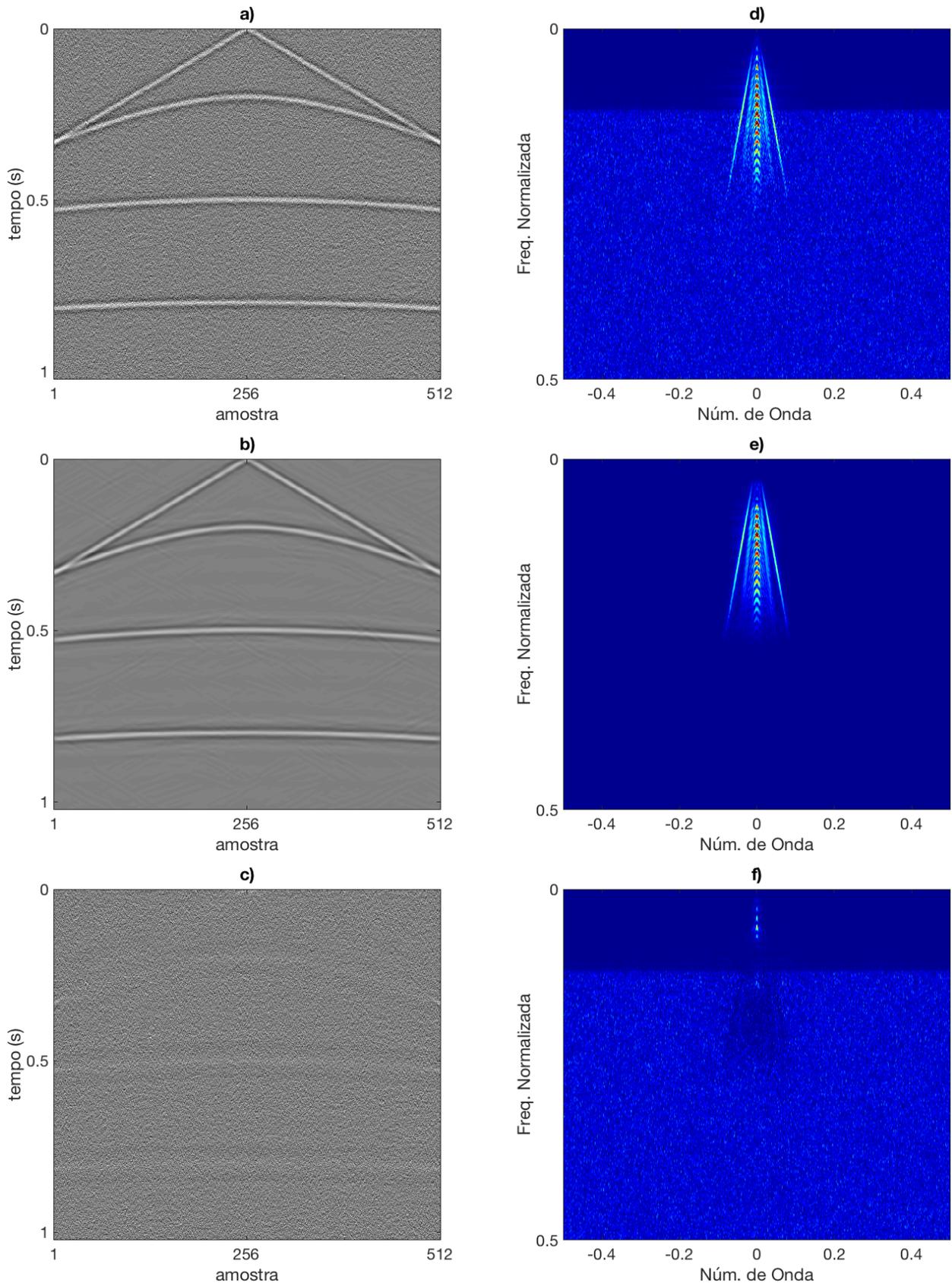


Fonte: O autor.

O modelo contendo ruído de alta frequência (Figura 38a) aplicando a constante  $\alpha = 2$  para todas as escalas, a imagem recuperada (Figura 38b) remove grande parte do ruído. O mesmo pode ser observado no perfil FK antes (Figura 38d) e após a filtragem (Figura 38e). Todavia, a parametrização novamente para a baixa frequência se apresentou um pouco agressiva, o que é evidenciado tanto no resíduo da filtragem (Figura 38c), quanto em seu respectivo perfil FK (Figura 38e).

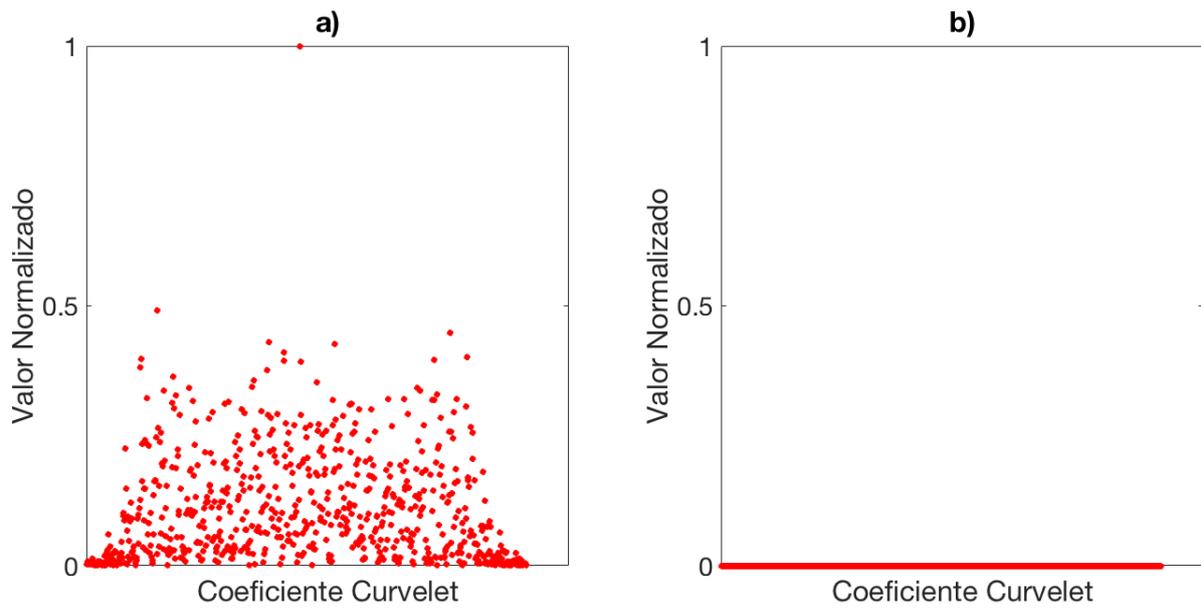
Por conter ruído de alta frequência, os coeficientes curvelet que melhor representam o dado estão entre as escalas  $j = 2$  (Figura 40a) e 4 (Figura 42a), sendo as escalas  $j = 1$  (Figura 39a),  $j = 5$  (Figura 43a) e  $j = 6$  (Figura 44a) são predominantemente ruidosas. Os coeficientes curvelet resultantes da filtragem utilizados na reconstrução da imagem são ilustrados nas Figuras 39b - 44b.

Figura 38: a) Modelo sintético com ruído de alta frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente.



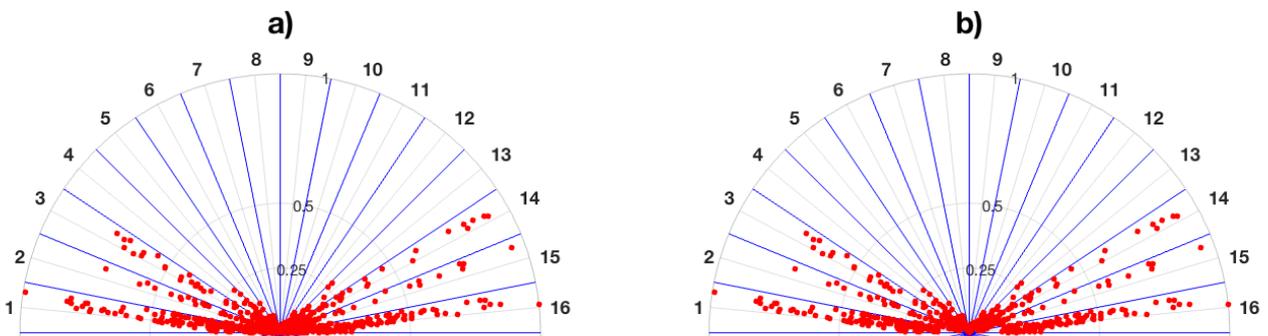
Fonte: O autor.

Figura 39: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 1$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.



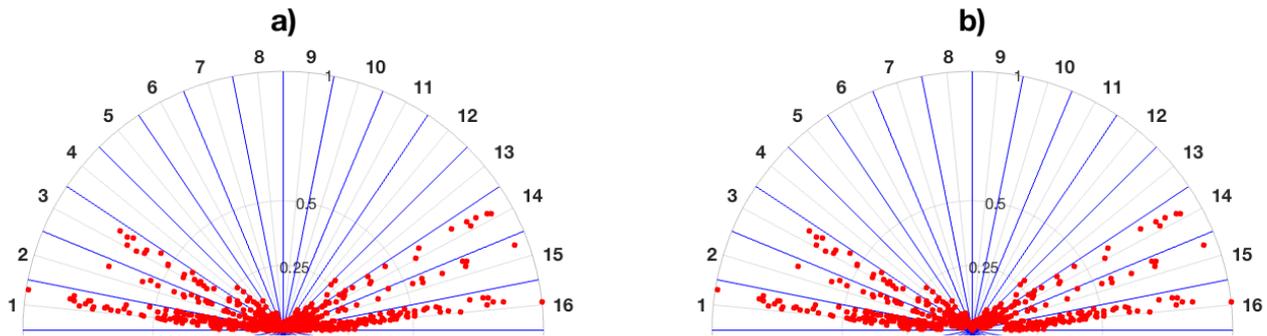
Fonte: O autor.

Figura 40: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 2$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.



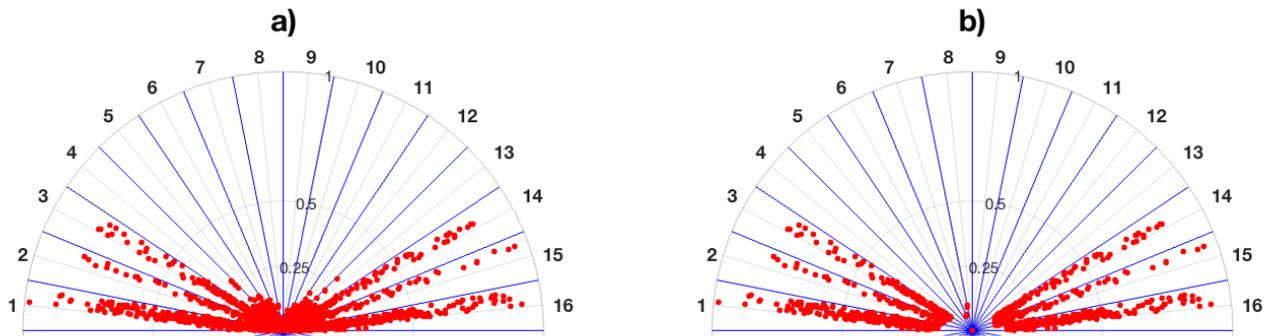
Fonte: O autor.

Figura 41: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 3$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.



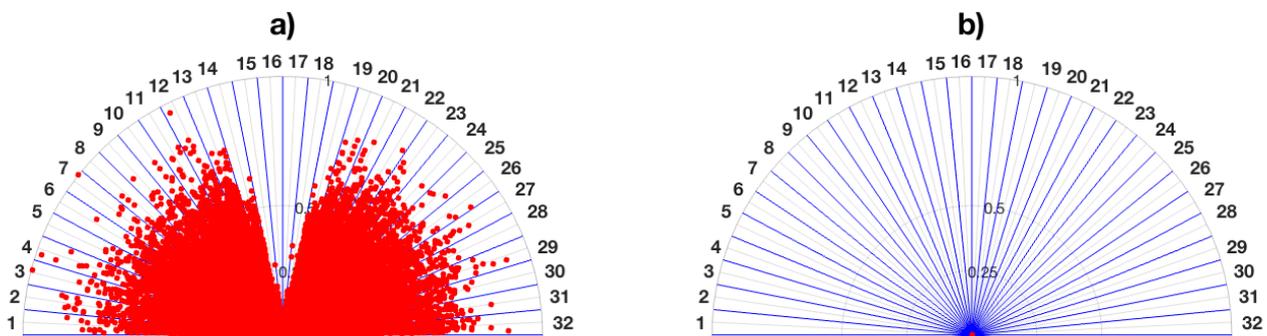
Fonte: O autor.

Figura 42: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 4$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.



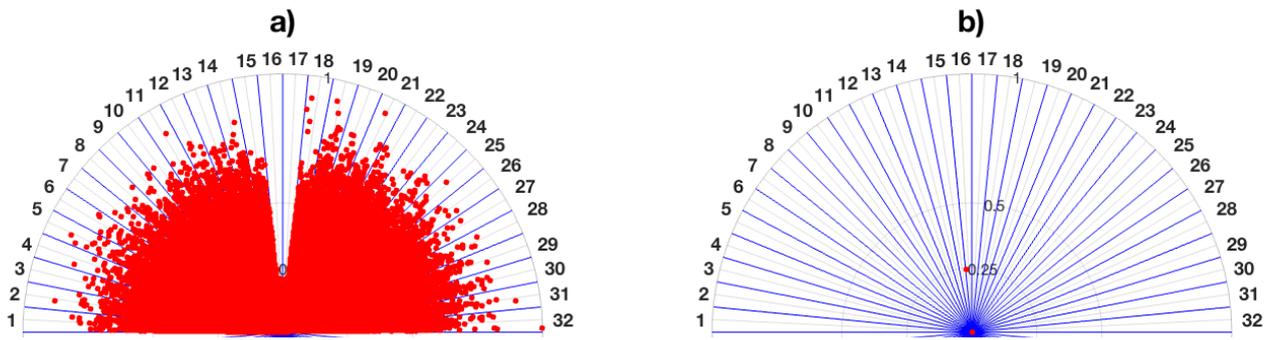
Fonte: O autor.

Figura 43: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 5$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.



Fonte: O autor.

Figura 44: Coeficientes curvelet normalizados na escala  $j = 6$  para o modelo sintético com ruído de alta frequência: a) antes e b) após a filtragem.

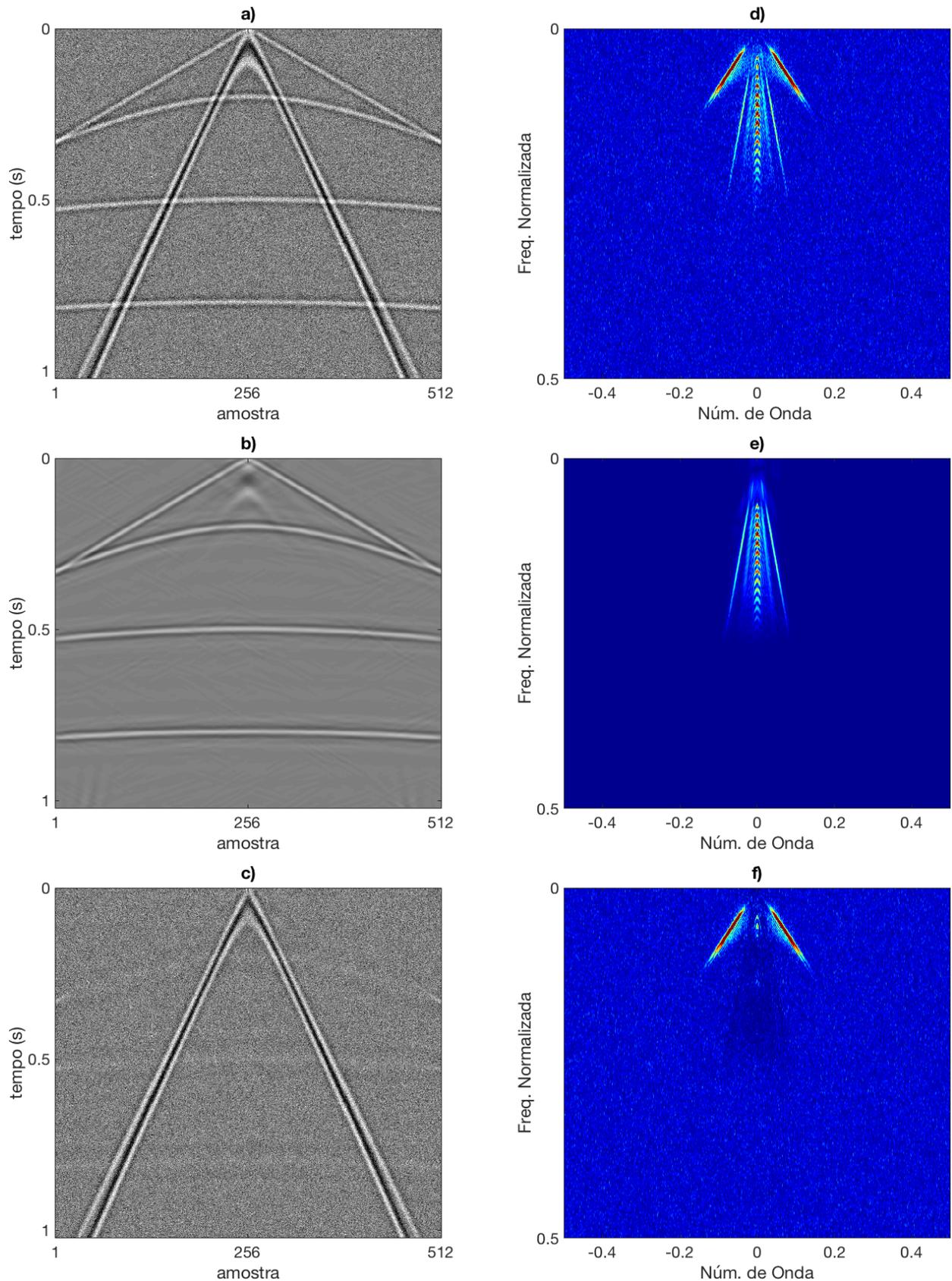


Fonte: O autor.

No modelo contendo ruído *GR* e ruído branco (Figura 45a), para ajustar o parâmetro  $\alpha_{j,l}$  foram identificadas em cada escala no domínio curvelet as sub-bandas que representassem o ruído coerente. Para a escala  $j = 2$ , o ruído *GR* é definido nas sub-bandas  $l = 3$  e  $l = 6$  (Figura 47a), nas escalas  $j = 3$  e  $j = 4$  o mesmo encontra-se nas sub-bandas  $l = 7$  e  $l = 10$  (Figuras 48a -49a). Já na escala  $j = 5$  o *GR* encontra-se nas escalas  $l = 13$  e  $l = 20$  (Figura 50a), havendo também uma predominância do ruído branco. As escalas  $j = 1$  (Figura 46a) e  $j = 6$  (Figura 51a) são compostas essencialmente por ruído.

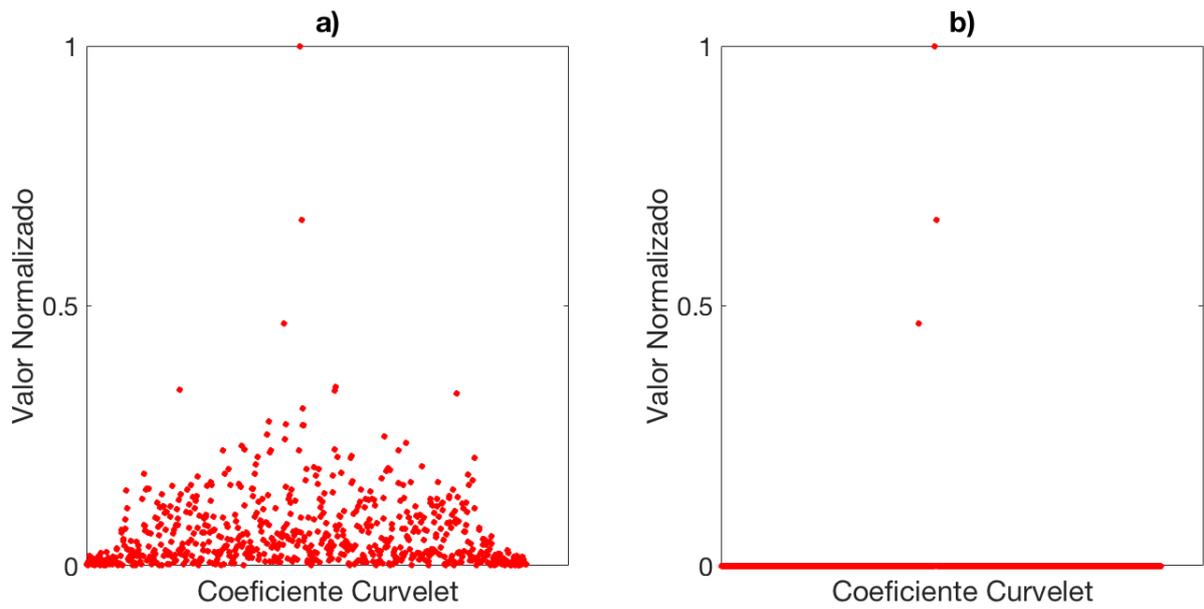
Sendo o *GR* identificado, o valor de  $\alpha_{j,l} = 100$  foi ajustado para estas sub-bandas específicas. Para as demais sub-bandas foi utilizado o valor de  $\alpha = 2$  para atenuar o ruído aleatório. Como resultado da filtragem (Figura 45b), a porção rasa do *GR* não foi completamente removida, sendo o resíduo (Figura 45c) composto do *GR*, ruído aleatório e parte da amplitude de baixa frequência. É possível observar pelo espectro FK antes (Figura 45d) e após a filtragem (Figura 45e) que o ruído aleatório e a região referente ao *GR* foram removidas. Pelo FK residual (Figura 45f) nota-se certo conteúdo de baixa frequência.

Figura 45: a) Modelo sintético com ruído de alta frequência; b) Modelo após a filtragem via truncamento Bayes no domínio curvelet; c) Resíduo da filtragem; d) a f) Espectro FK das figuras (a-c), respectivamente.



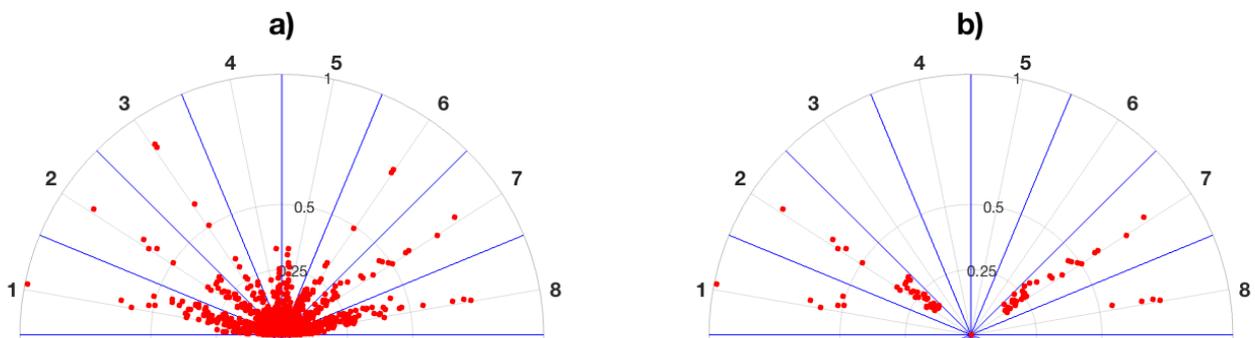
Fonte: O autor.

Figura 46: Coeficientes curvelet na escala  $j = 1$  para o modelo sintético com ruído branco e  $GR$ : a) antes e b) após a filtragem.



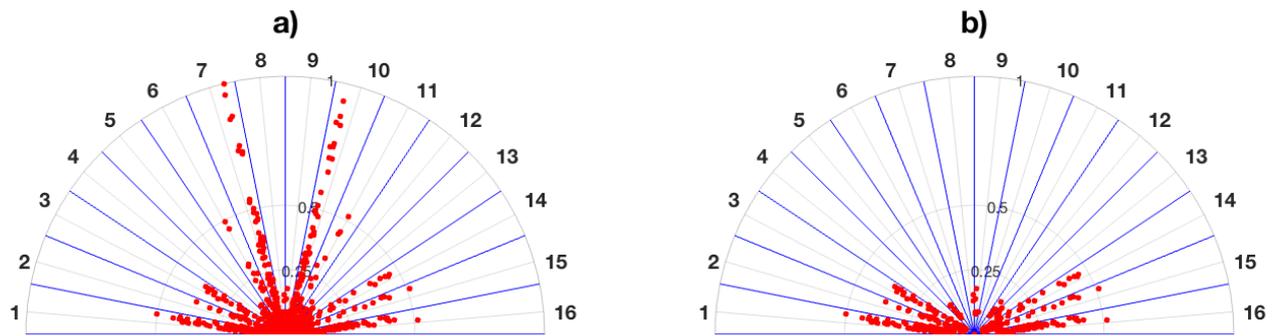
Fonte: O autor.

Figura 47: Coeficientes curvelet na escala  $j = 2$  para o modelo sintético com ruído branco e  $GR$ : a) antes e b) após a filtragem.



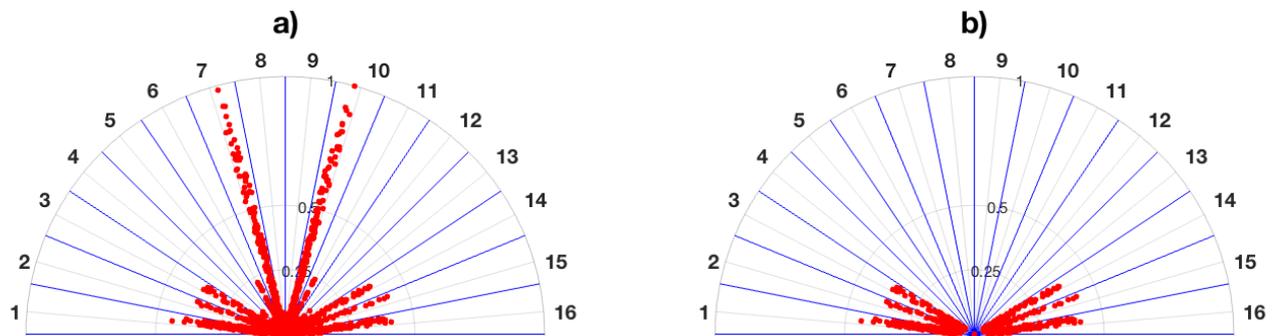
Fonte: O autor.

Figura 48: Coeficientes curvelet na escala  $j = 3$  para o modelo sintético com ruído branco e  $GR$ : a) antes e b) após a filtragem.



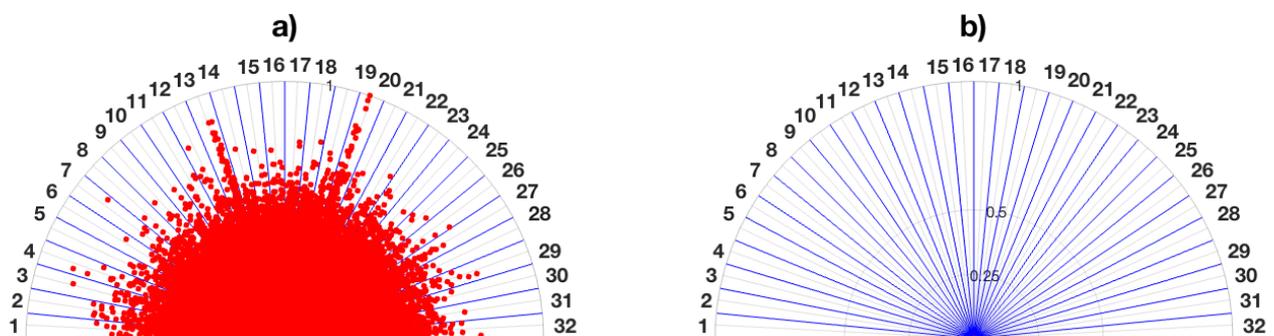
Fonte: O autor.

Figura 49: Coeficientes curvelet na escala  $j = 4$  para o modelo sintético com ruído branco e  $GR$ : a) antes e b) após a filtragem.



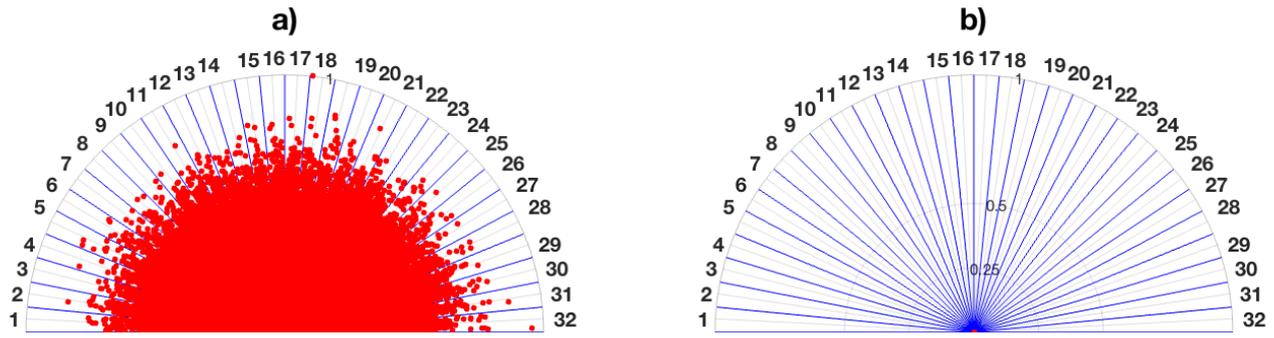
Fonte: O autor.

Figura 50: Coeficientes curvelet na escala  $j = 5$  para o modelo sintético com ruído branco e  $GR$ : a) antes e b) após a filtragem.



Fonte: O autor.

Figura 51: Coeficientes curvelet na escala  $j = 6$  para o modelo sintético com ruído branco e GR: a) antes e b) após a filtragem.



Fonte: O autor.

A performance dos resultados sintéticos podem ser analisados através do cálculo do pico sinal-ruído (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010) :

$$PSNR = 20 \log_{10} \frac{N |max(D_{original}) - min(D_{original})|}{\sqrt{\sum (D' - D_{original})^2}}. \quad (4.1)$$

na qual  $N$  é o número total de amostras na imagem,  $D_{original}$  o modelo sintético original e  $D'$  o respectivo modelo a ser calculado o  $PSNR$ .

Os valores de PSNR antes e após a filtragem são expressos na Tabela 1.

Tabela 1: Valores de PSNR para os modelos sintéticos de ruídos antes e após a filtragem

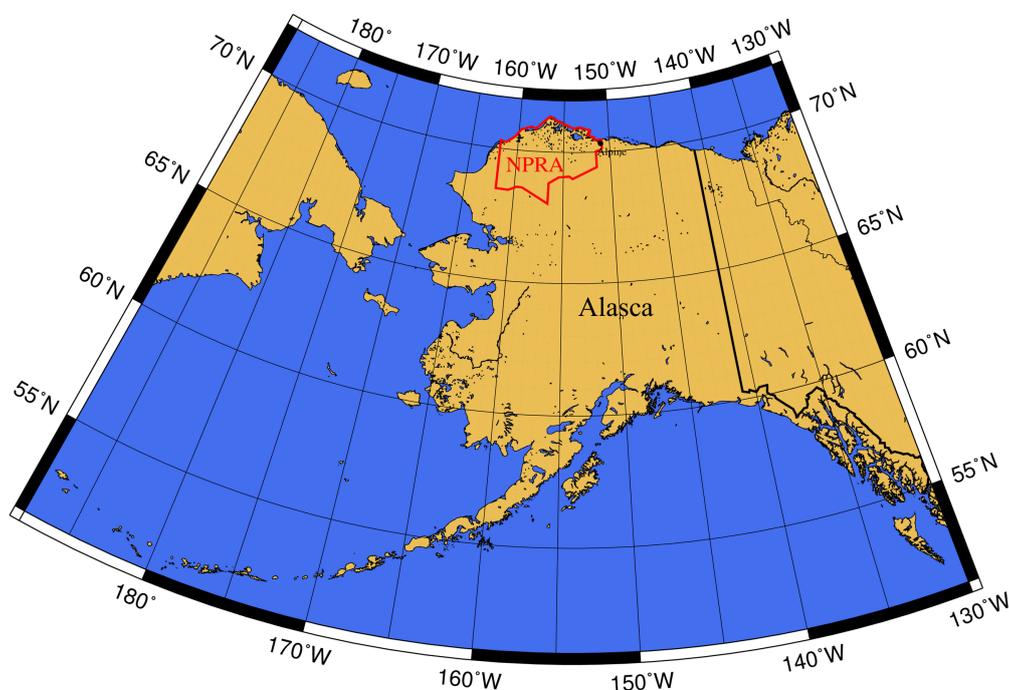
	PSNR (dB)	
	Ruidosos	Filtrado
Ruído Branco	6,0519	24,5824
Ruído de Baixa	5,8543	24,8917
Ruído de Alta	6,0249	25,0689
Ruído Branco e GR	4,8354	22,9898

Fonte: O autor.

## 4.2 Dado Terrestre NPRA 31-81

Para o processamento do dado real, foram utilizados dados públicos da Reserva Nacional do Alasca (*NPRA*). Localizado na região norte do estado Norte Americano do Alasca (Figura 52), a *NPRA* foi estabelecida em 1923 com uma área de 93,000 m<sup>2</sup> (BIRD; HOUSEKNECHT, 2002). Como parte do programa de exploração mais de 22.000 Km de linhas sísmicas 2D foram coletadas (BRUYNZEEL; GULDENZOPF; JPICKARD, 1982). Para aplicação da transformada curvelet no fluxo de processamento foi escolhida a linha 31-81 (Figura 53), parte da prospecção N-PR-81-AK (disponível em: <https://walrus.wr.usgs.gov/namss/survey/n-pr-81-ak/>).

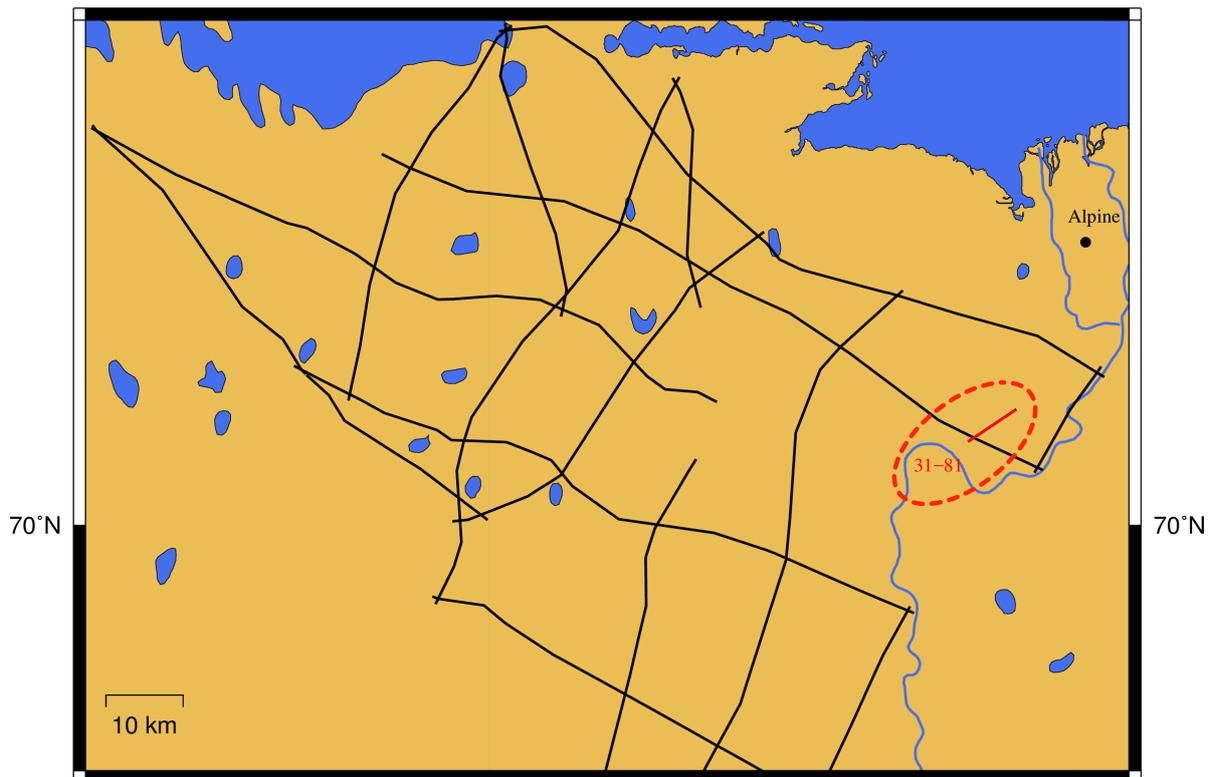
Figura 52: Localização da região Reserva Nacional do Alasca (*NPRA*).



Fonte: O autor.

A aquisição realizada foi do tipo *split spread*, na qual a fonte é posicionada no ponto médio do arranjo de receptores, formada por 100 canais, espaçados 33,5 metros e com uma taxa de amostragens de 2 milissegundos. No entanto, dos 100 canais disponíveis apenas 96 deles são válidos, sendo os 4 últimos editados. Cada posição de tiro é espaçada em 134,1 metros, contando com um total de 56 estações e cobertura máxima de 12 traços. Os primeiros 4 tiros são ilustrados na Figura 54, e o espectro FK para o tiro 101 ilustrado na Figura 55.

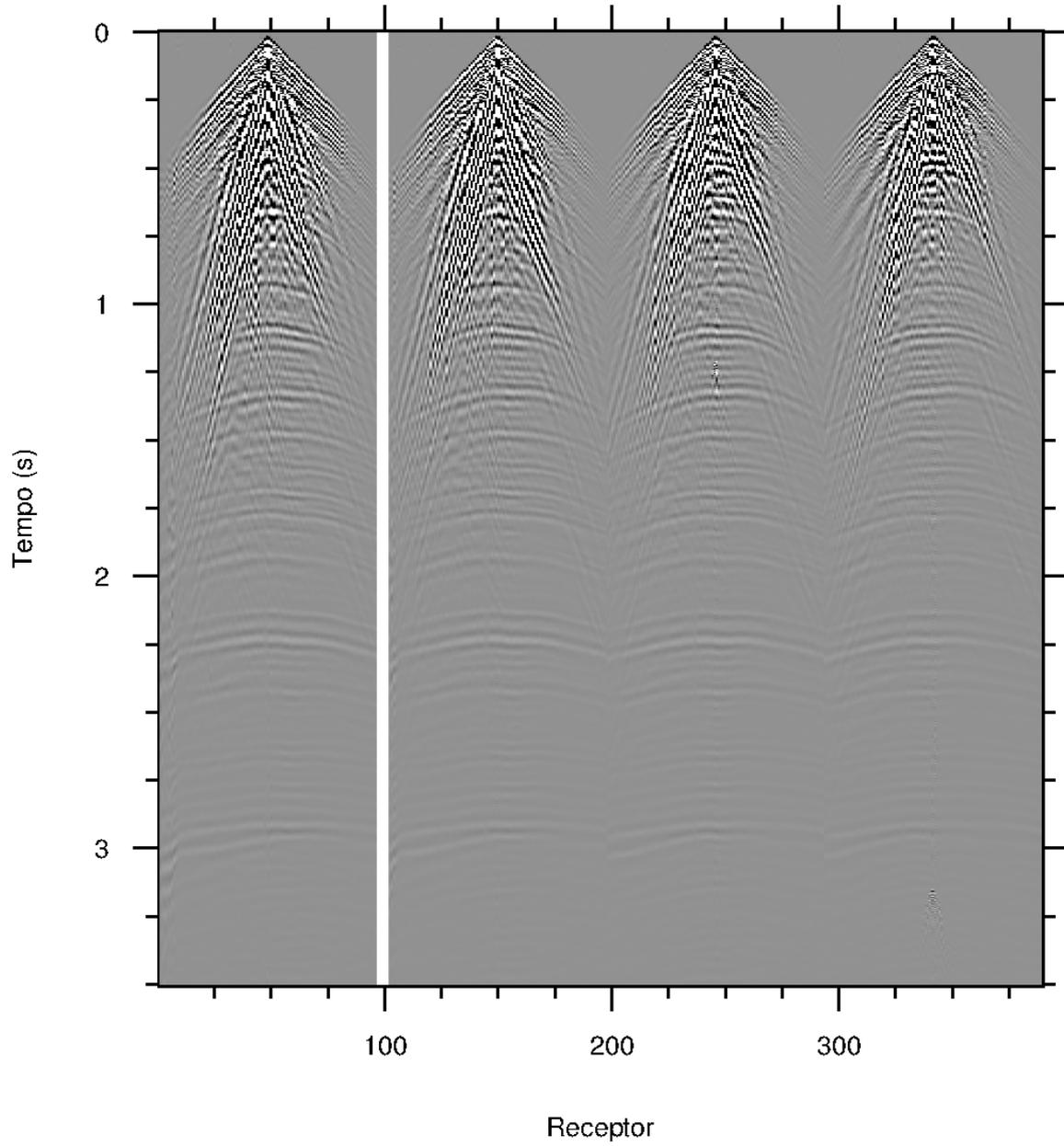
Figura 53: Área de prospecção sísmica N-PR-81-AK, destacando a linha 31-81 em vermelho.



Fonte: O autor.

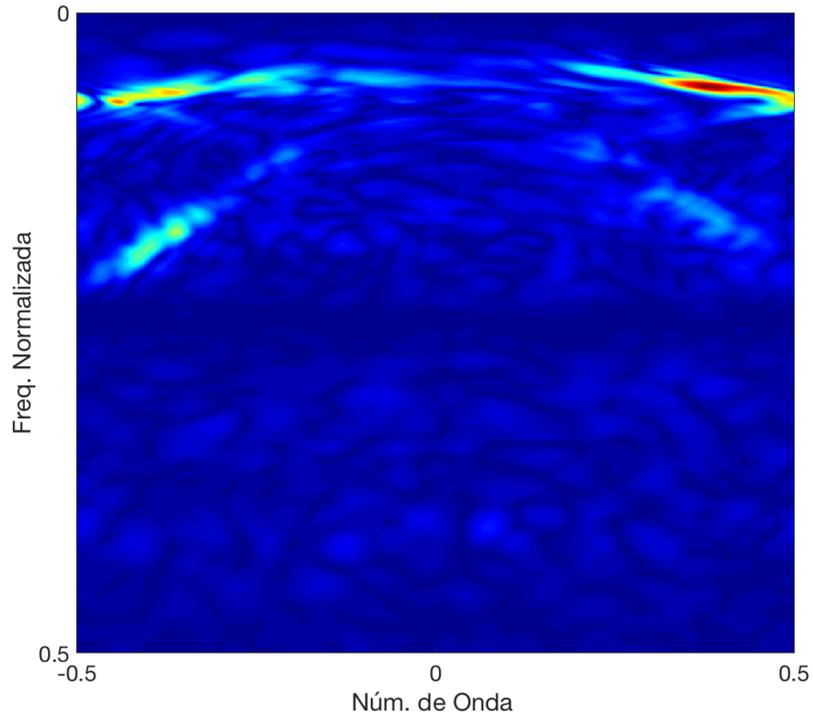
Pode-se observar no dado que o ruído predominante é referente ao *GR*, sendo a remoção deste o objetivo da aplicação da transformada curvelet. O fluxo de processamento que precede a aplicação da filtragem no domínio curvelet segue a sequência de processamento básico, como o proposto por Yilmaz (2001) e ilustrado na Figura 56. As ferramentas utilizadas no processamentos sísmico fazem parte das bibliotecas *SeismicLab* e *SeisLab* 3.02 (disponível em: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/53109-seislab-3-02>).

Figura 54: Tiros brutos 101 a 104.



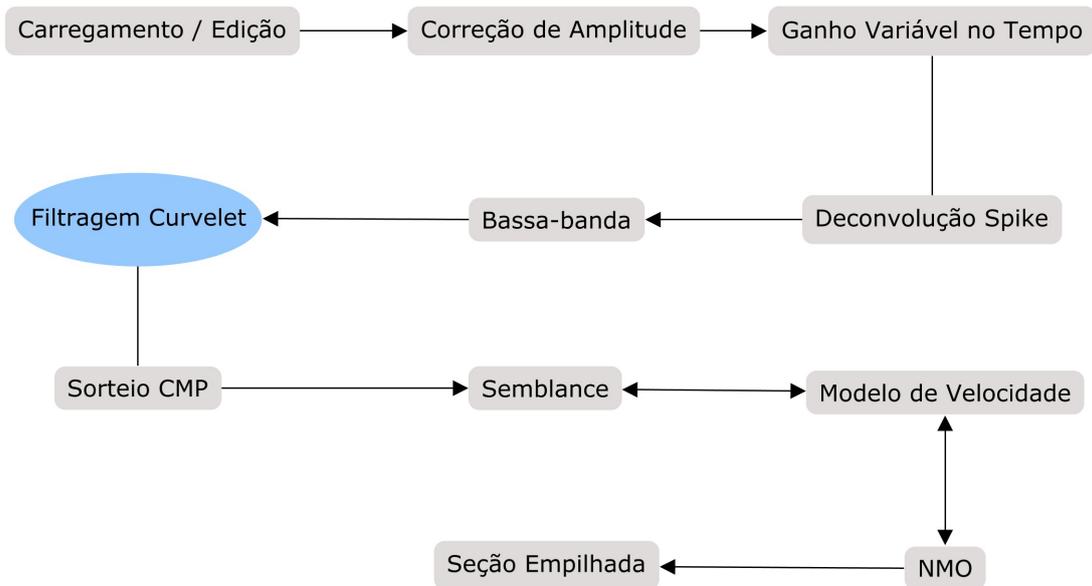
Fonte: O autor.

Figura 55: Espectro FK para o tiro bruto 101.



Fonte: O autor.

Figura 56: Fluxo de processamento aplicado para a linha 31-81.



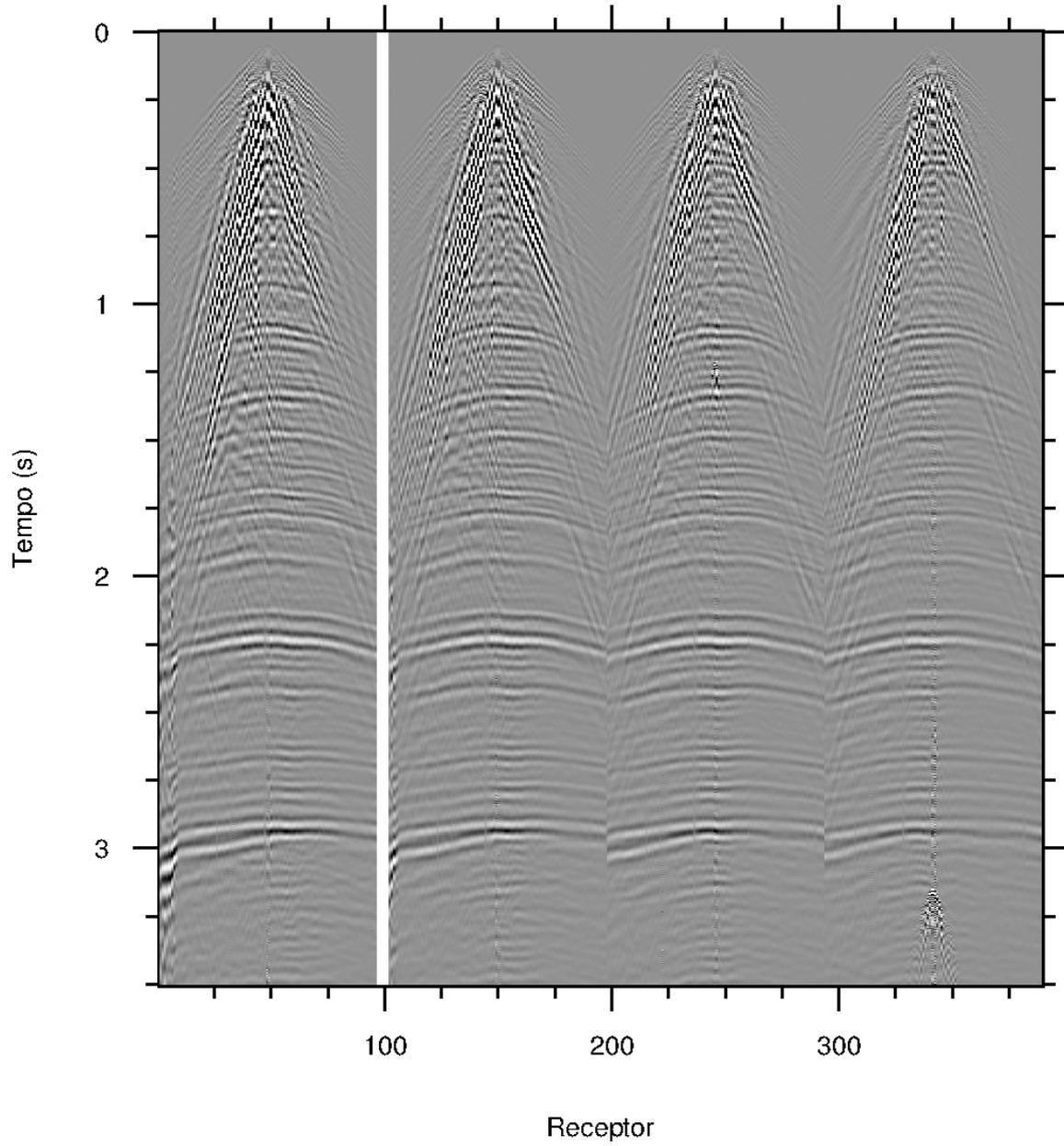
Fonte: O autor.

O processamento teve início pelo carregamento do dado, criação da geometria e edição de traços marcados como destacáveis de acordo com o relatório do observador. Em seguida, foi realizada a correção de amplitude em função da divergência esférica (Figura 57). Sendo esta correção feita traço-a-traço, em função da variação no tempo, restaurando as amplitudes em função da profundidade.

Uma segunda recalibração das amplitudes AGC foi aplicada antes da compressão da *wavelet* através da deconvolução *spike* (Figura 58). Devido a inserção de ruídos relacionada ao processo de deconvolução, foi aplicado um filtro passa banda de 2 – 60Hz (Figura 59). Os espectros FK para correção de divergência esférica (Figura 60), ganho AGC e deconvolução *spike* (Figura 61) e filtro passa-banda (Figura 62) demonstram o balanço espectral de modo que o sinal distingui-se do ruído *GR*.

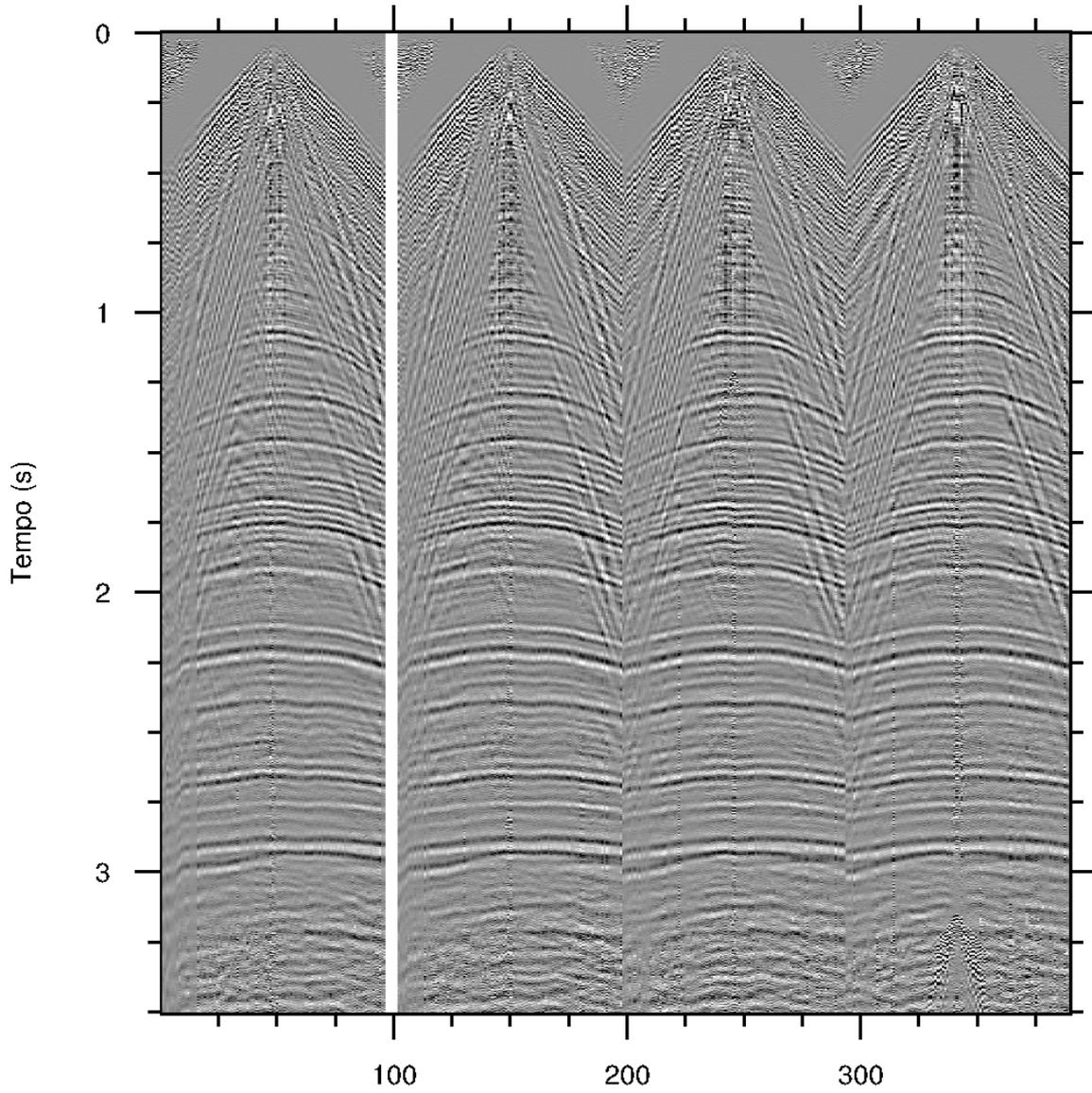
Para aplicação da TC, é inserida uma borda de zeros estendendo o dado de  $1/4$  no tempo e em  $1/2$  no espaço a fim de evitar os efeitos de falseamento. No domínio curvelet foram identificadas as respectivas orientações contaminadas por *GR* e aplicado o truncamento Bayes (Equação 3.40). Devido ao fato do arranjo da aquisição geometria se manterem constantes, um mesmo filtro direcional no domínio curvelet foi tido como válido para todos os tiros. Além do ruído coerente, o ruído aleatório remanescente também é removido durante esta etapa.

Figura 57: Tiros 101 a 104 após a aplicação do ganho correção de divergência esférica.



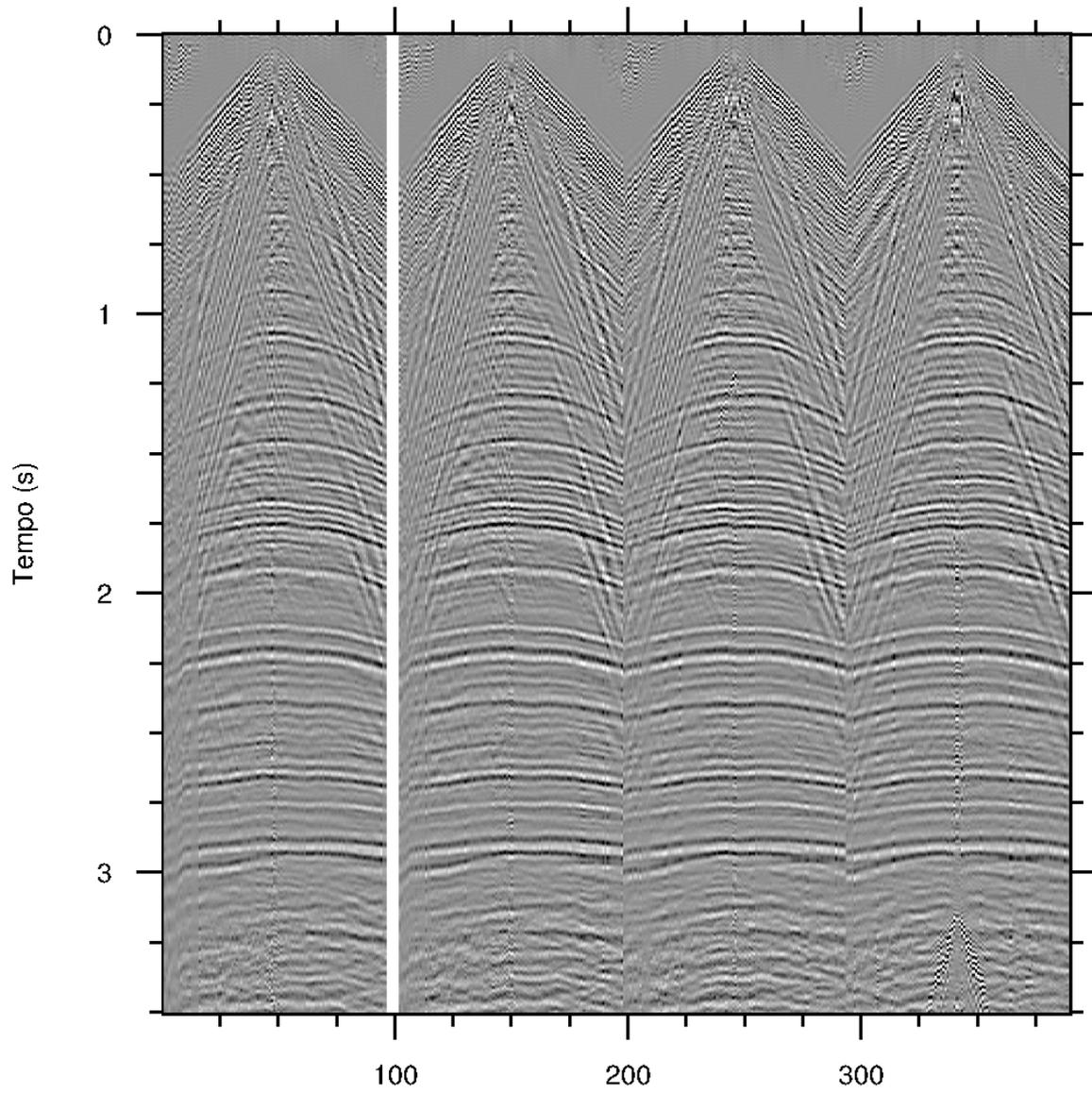
Fonte: O autor.

Figura 58: Tiros 101 a 104 após o AGC e a deconvolução *spike*.



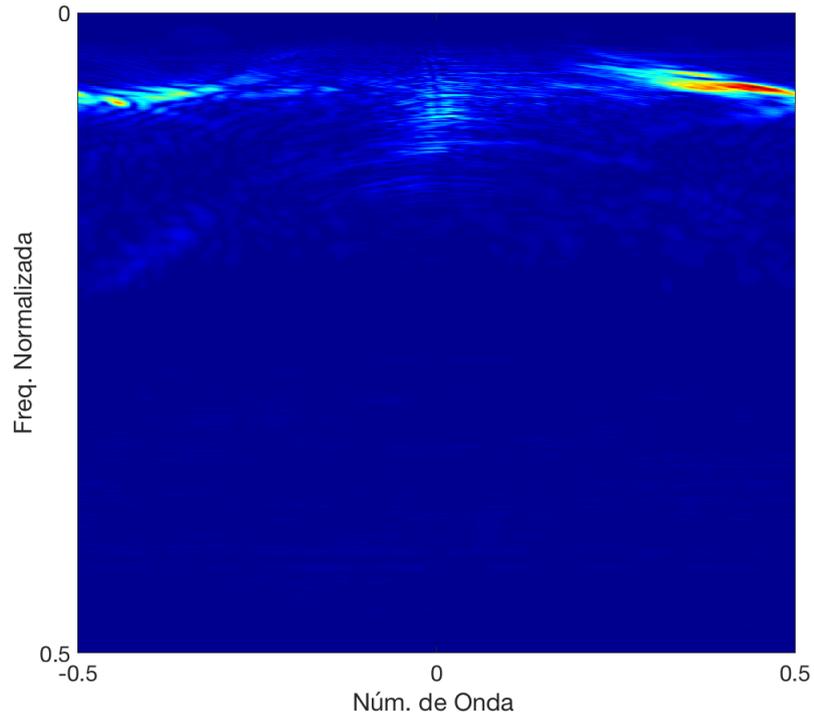
Receptor  
Fonte: O autor.

Figura 59: Tiros 101 a 104 após a aplicação do filtro passa banda de 2 a 60Hz.



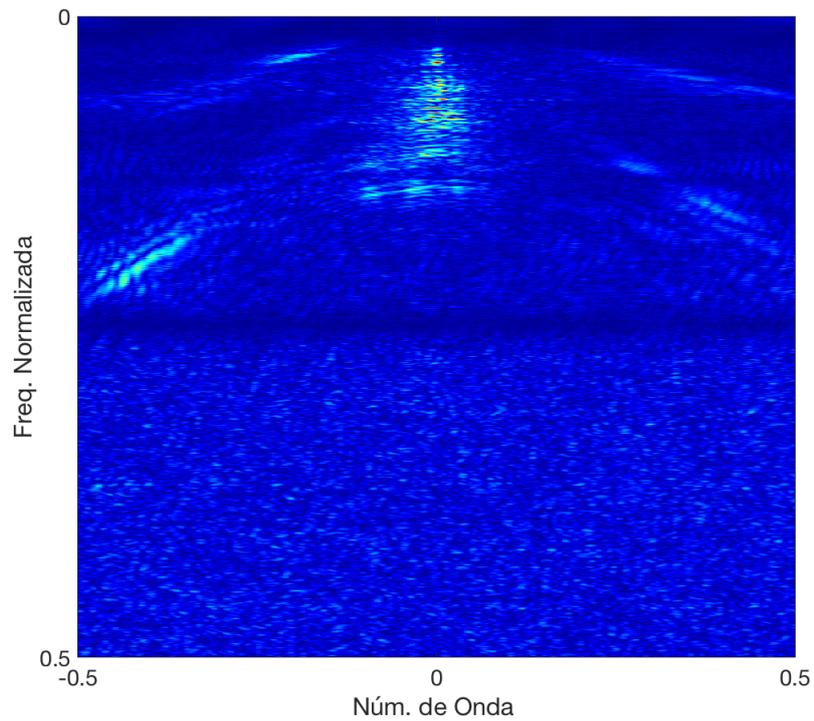
Receptor  
Fonte: O autor.

Figura 60: Perfil FK para o tiros 101 após a aplicação do ganho correção de divergência esférica .



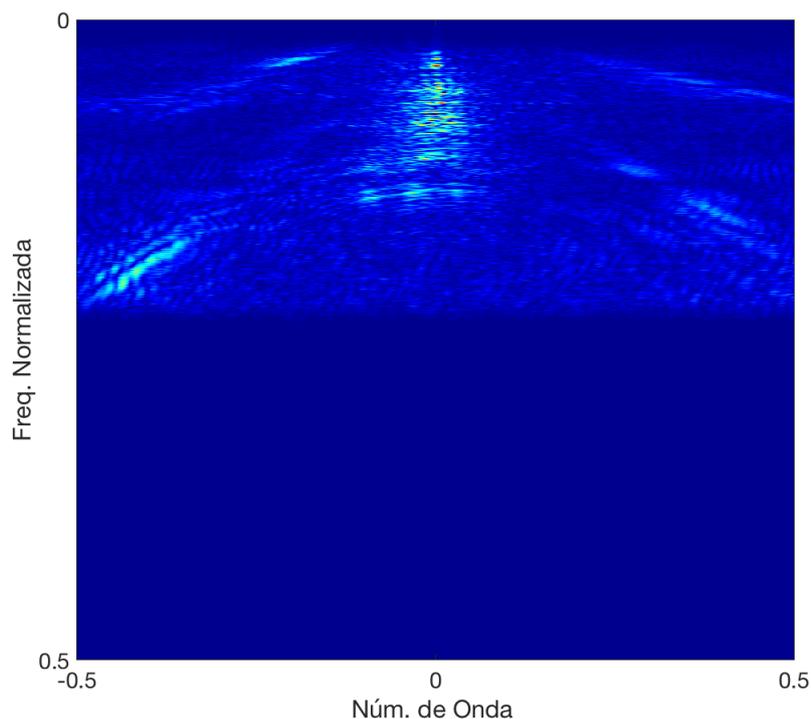
Fonte: O autor.

Figura 61: Perfil FK para o tiro 101 após AGC e deconvolução *spike*.



Fonte: O autor.

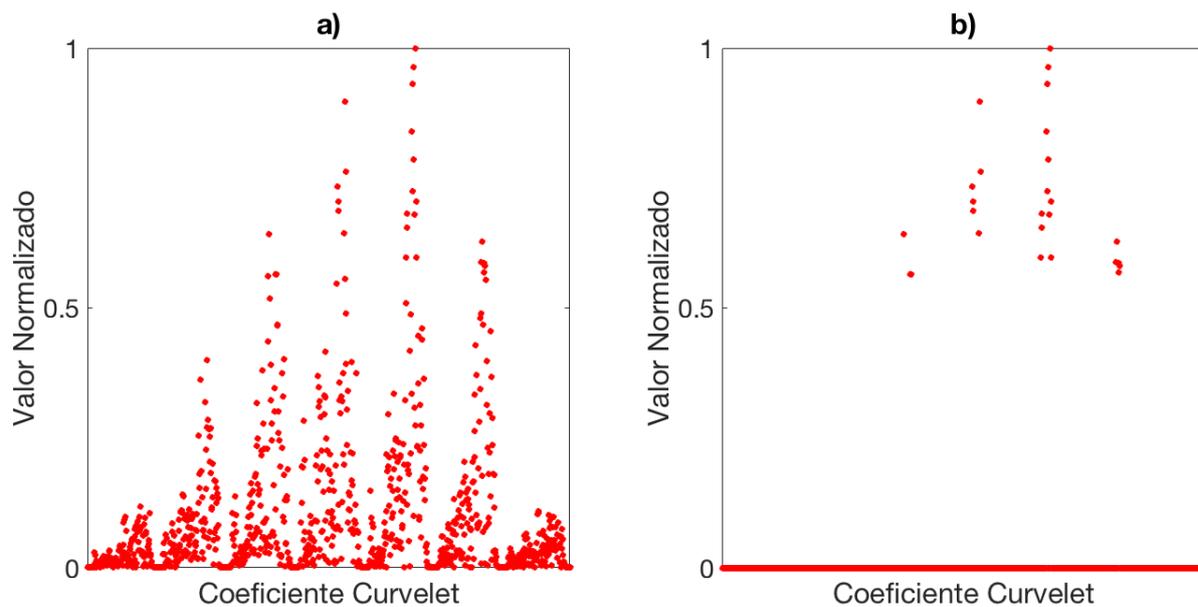
Figura 62: Perfil FK para o tiros 101 após aplicação do filtro passa banda 2-60Hz.



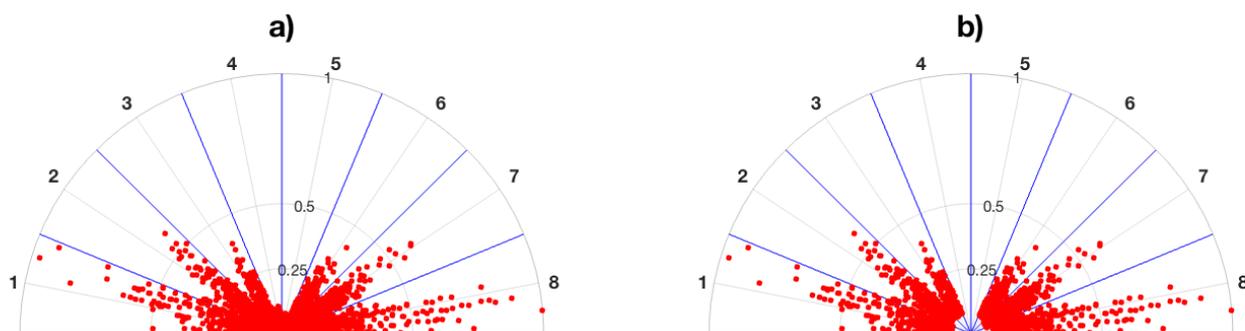
Fonte: O autor.

Dadas as premissas de atenuação do ruído aleatório e coerente avaliadas nos modelos sintéticos, a mesma abordagem é incorporada na aplicação ao dado real. Utilizando a representação dos coeficientes por suas respectivas direções e normalizados de acordo com a escala foram identificadas as respectivas sub-bandas que representam o ruído *GR*. Na escala  $j = 2$ , o *GR* foi identificado nas sub-bandas  $l = 4$  e  $l = 5$  (Figura 64a), já nas escalas  $j = 3$  e  $j = 4$  o mesmo encontra-se nas sub-bandas  $l = 8$  e  $l = 9$  (Figuras 65a - 66a). Para as escalas  $j = 5$  e  $j = 6$  o *GR* foi identificado nas sub-bandas  $l = 16$  e  $l = 17$  (Figuras 67a - 68a).

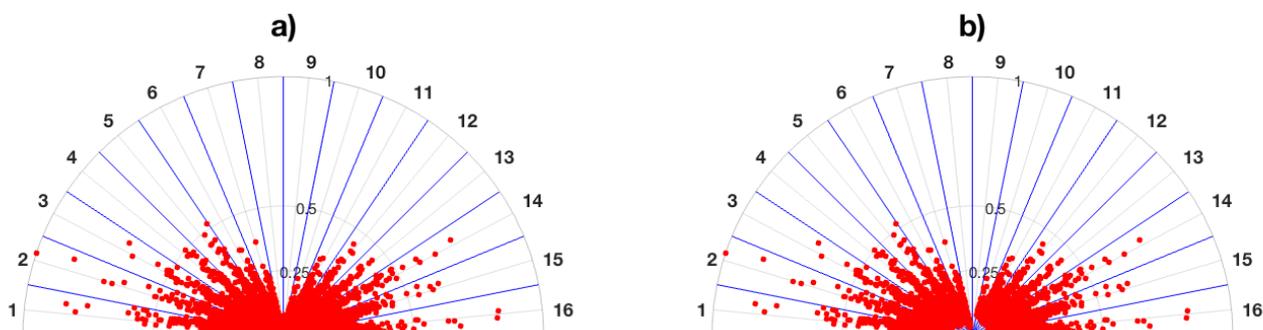
O truncamento abrupto via Bayes foi aplicado com valores de  $\alpha$  igual 3 para a primeira escala, 6 para as demais e 100 para as respectivas direções que contém o *GR*. Os coeficientes curvelet filtrados (Figuras 63b - 68b) são utilizados para a reconstrução do sismograma (Figura 69), sendo possível preservar os refletores até então sobrepostos pelo *GR*. Isto é ressaltado pelo resíduo da filtragem (Figura 70) que compreende essencialmente ruído aleatório e *GR*. Comparando os espectros FK do dado de entrada (Figura 62) e do dado filtrado (Figura 71) também há significativa remoção de ruídos.

Figura 63: Coeficientes curvelet na escala  $j = 1$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

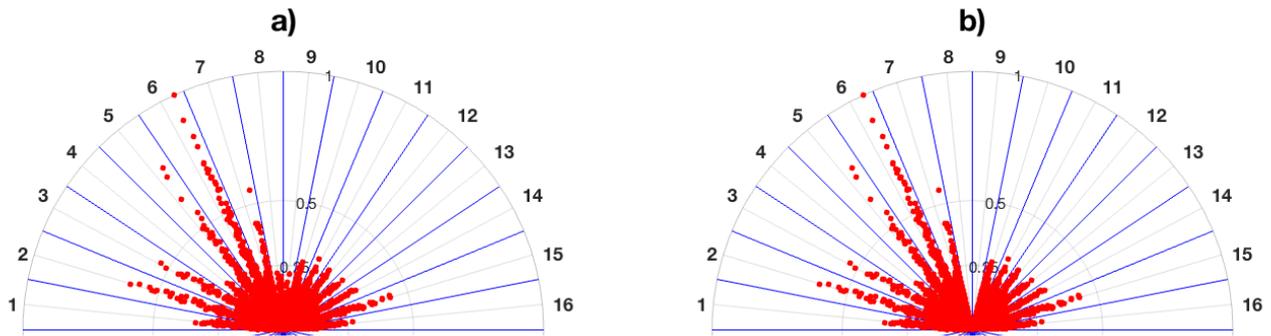
Fonte: O autor.

Figura 64: Coeficientes curvelet na escala  $j = 2$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

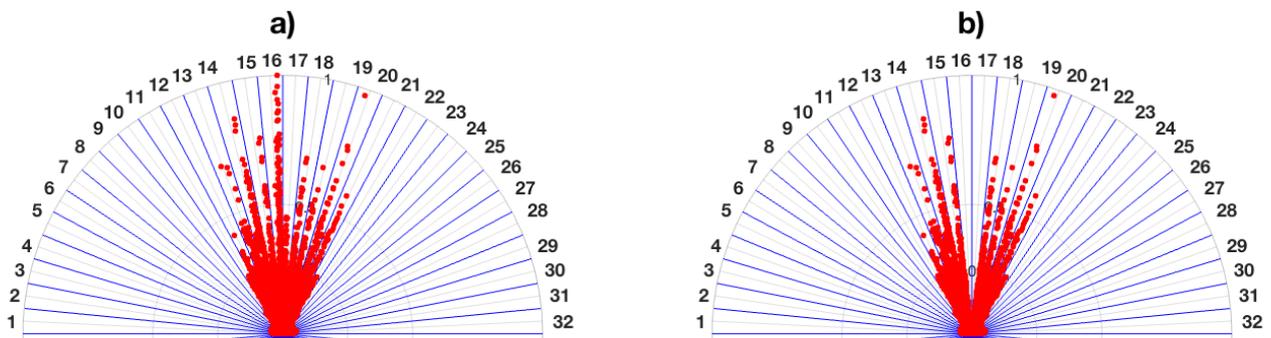
Fonte: O autor.

Figura 65: Coeficientes curvelet na escala  $j = 3$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

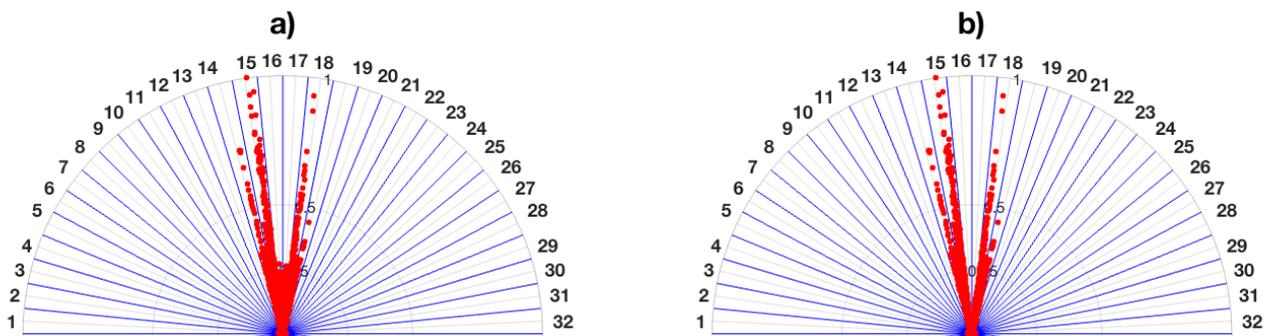
Fonte: O autor.

Figura 66: Coeficientes curvelet na escala  $j = 4$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

Fonte: O autor.

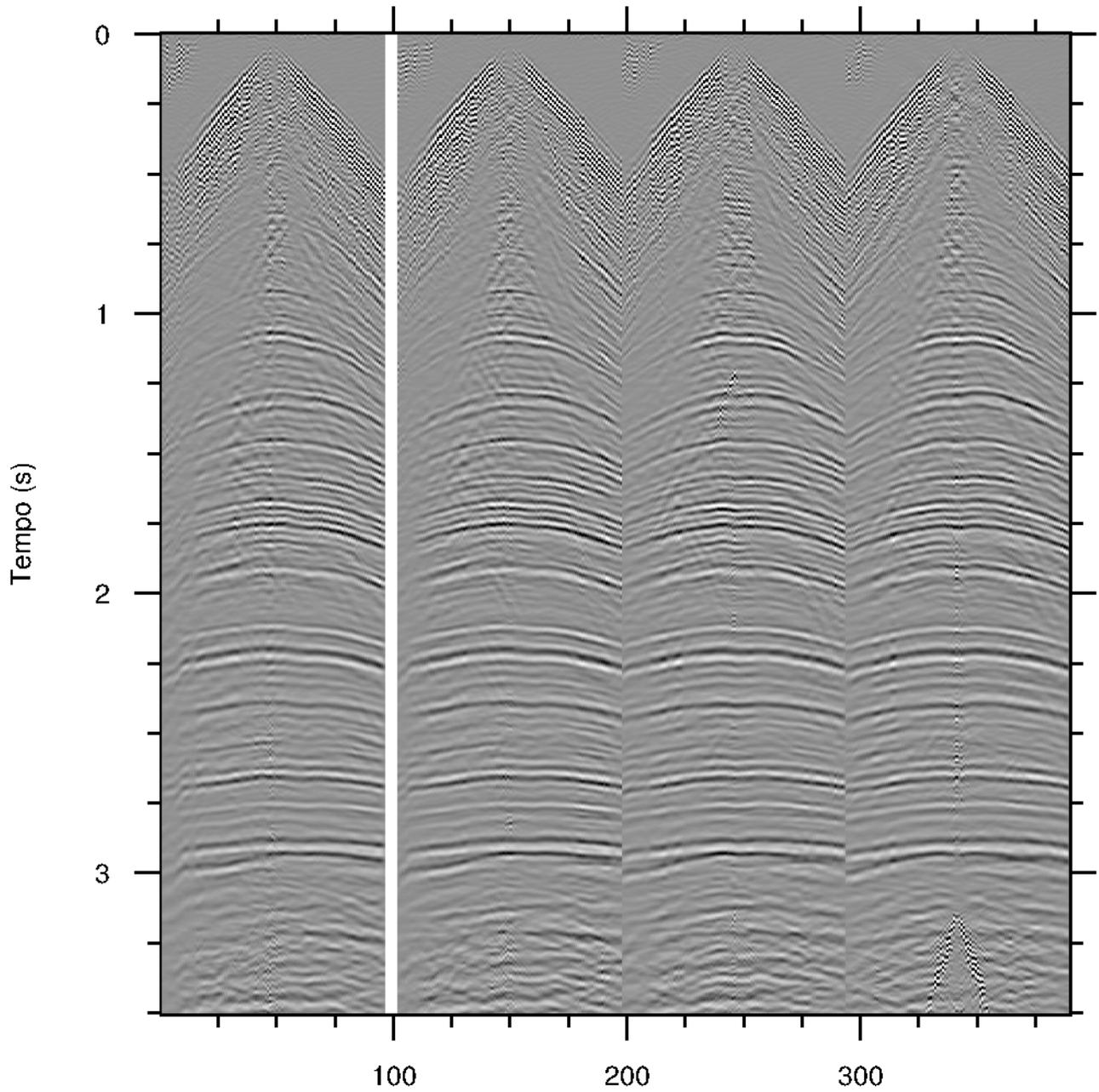
Figura 67: Coeficientes curvelet na escala  $j = 5$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

Fonte: O autor.

Figura 68: Coeficientes curvelet na escala  $j = 6$  para o tiro 101: a) antes e b) após a filtragem.

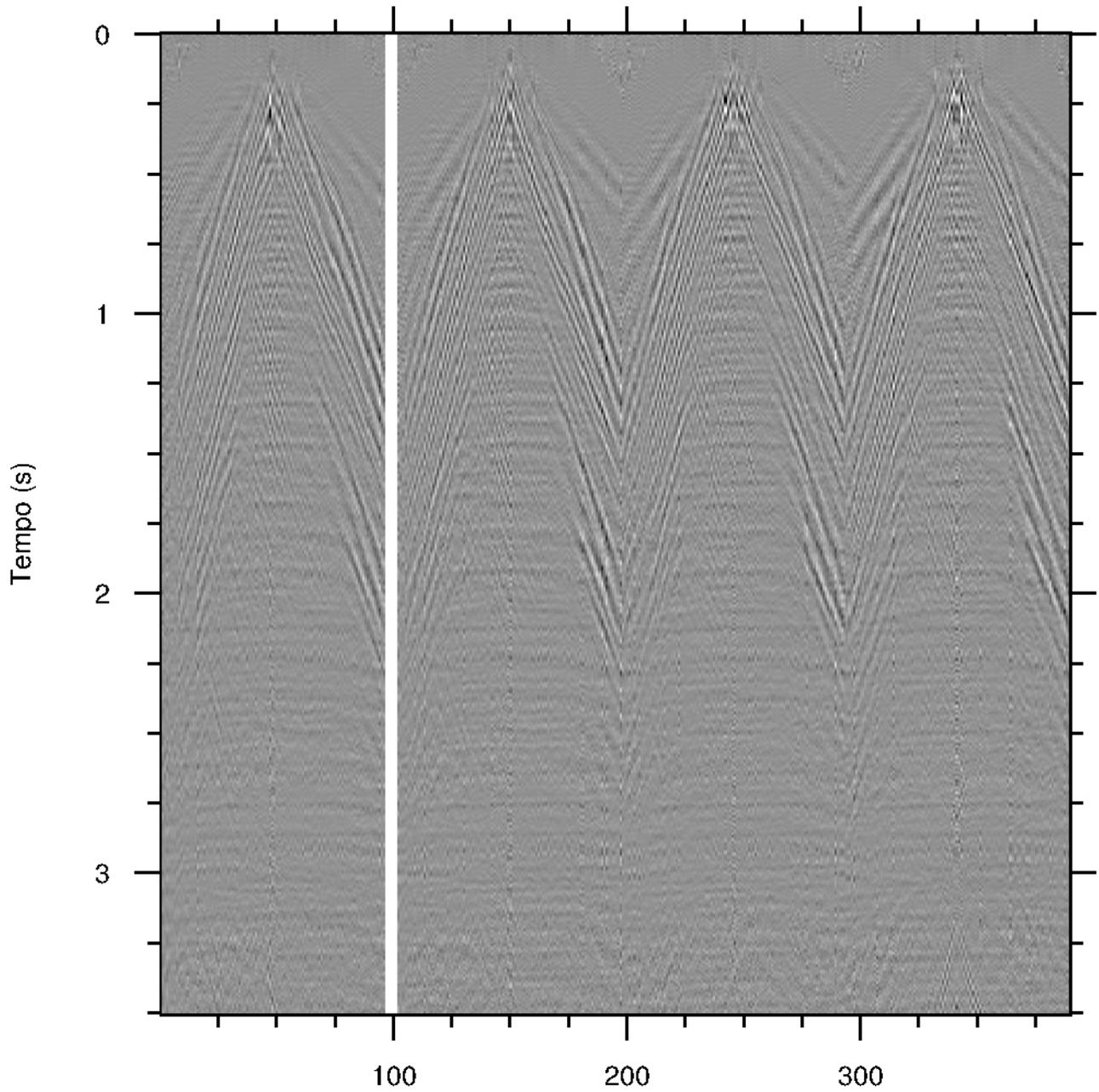
Fonte: O autor.

Figura 69: Tiros 101 a 104 após a aplicação da filtragem curvelet.



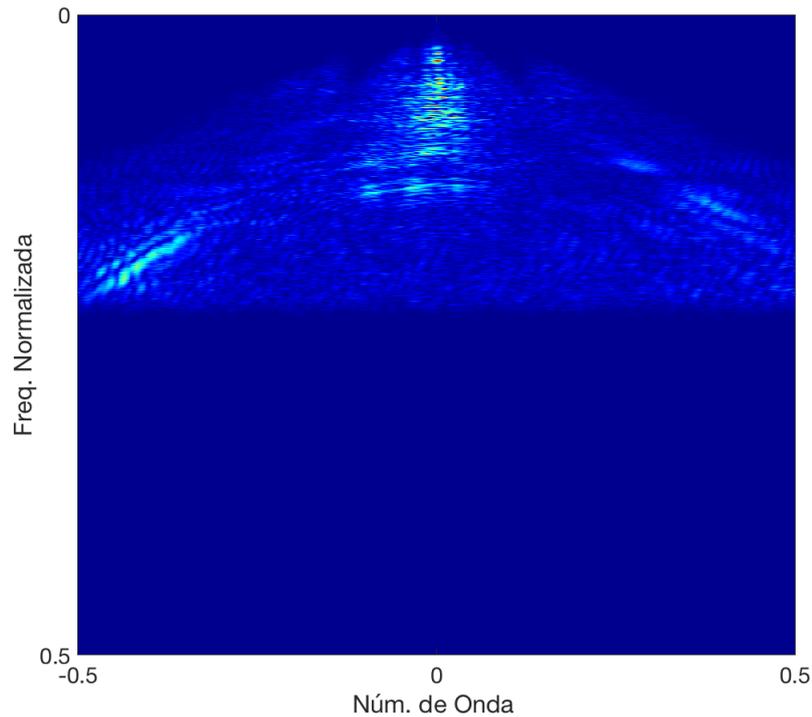
Receptor  
Fonte: O autor.

Figura 70: Resíduos da filtragem curvelet para os Tiros 101 a 103.



Receptor  
Fonte: O autor.

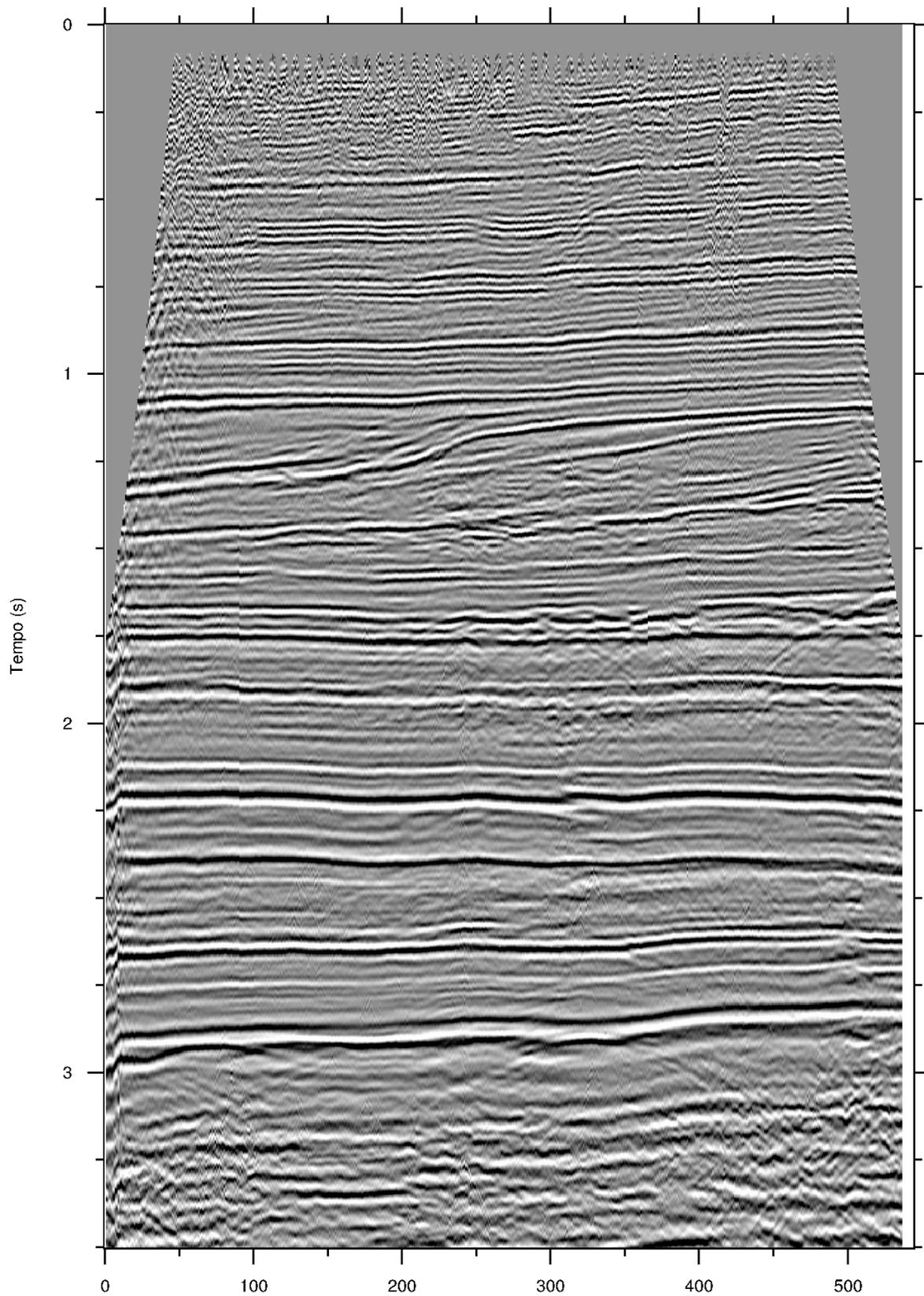
Figura 71: Perfil FK para o tiros 101 após a aplicação da filtragem curvelet.



Fonte: O autor.

O dado filtrado é então recuperado através da transformada curvelet inversa, seguida da remoção da borda estendida. Com o resultado da filtragem é feito o sorteio por ponto médio comum (CMP) e elaborado o modelo de velocidade interativamente através do *semblance*. Em posse do modelo de velocidade é aplicada a correção de *normal moveout* no domínio CMP, alinhando os refletores no tempo para então gerar a seção final empilhada (Figura 72). Comparado o resultado da filtragem a seção empilhada bruta, ou seja, sem nenhum tipo de filtragem (Figura 73) o resíduo (Figura 74) mostra grande parte do ruído *GR* sendo removido.

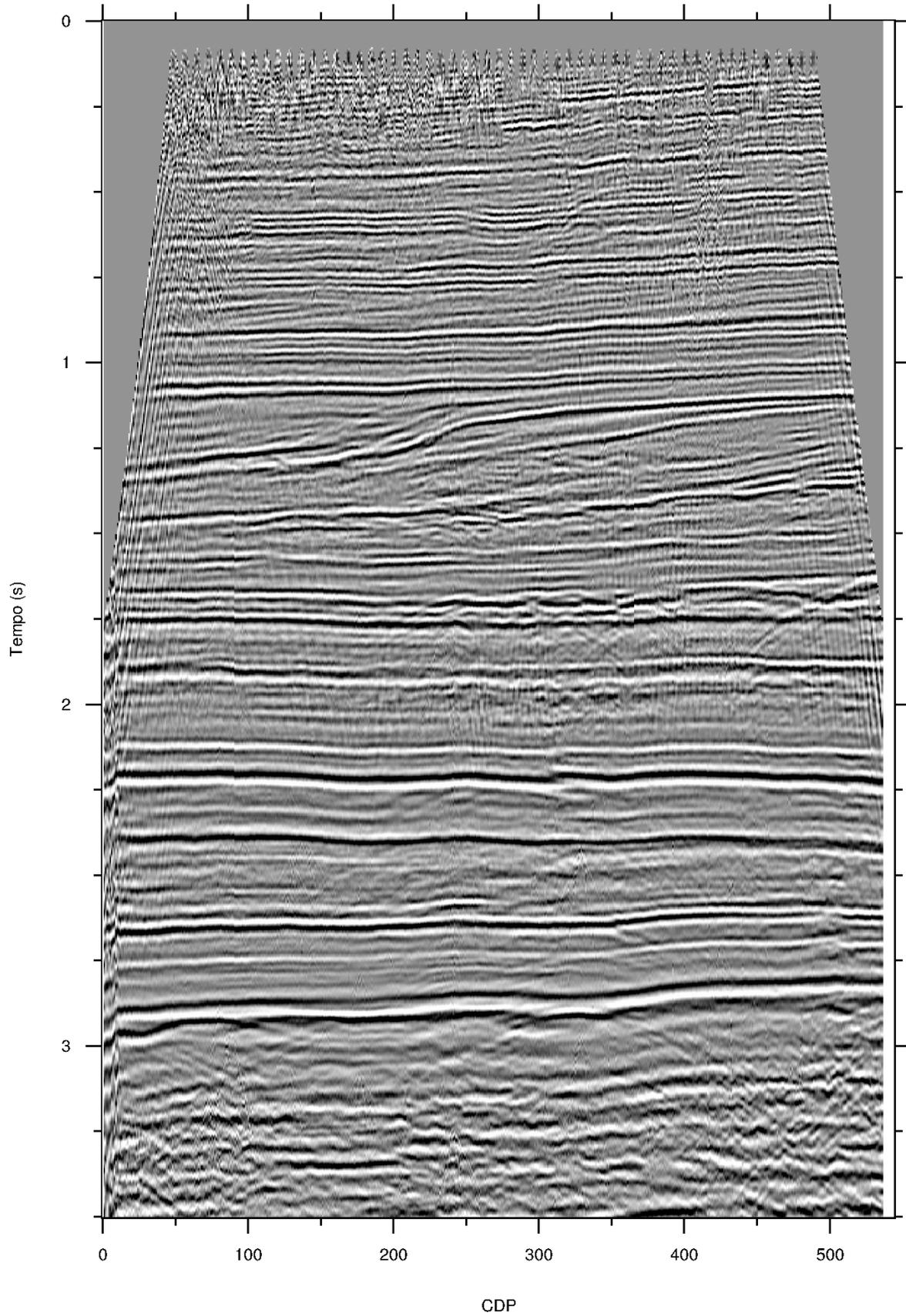
Figura 72: Seção final empilhada normalizada resultante do processamento utilizando a transformada curvelet no fluxo proposto.



CDP

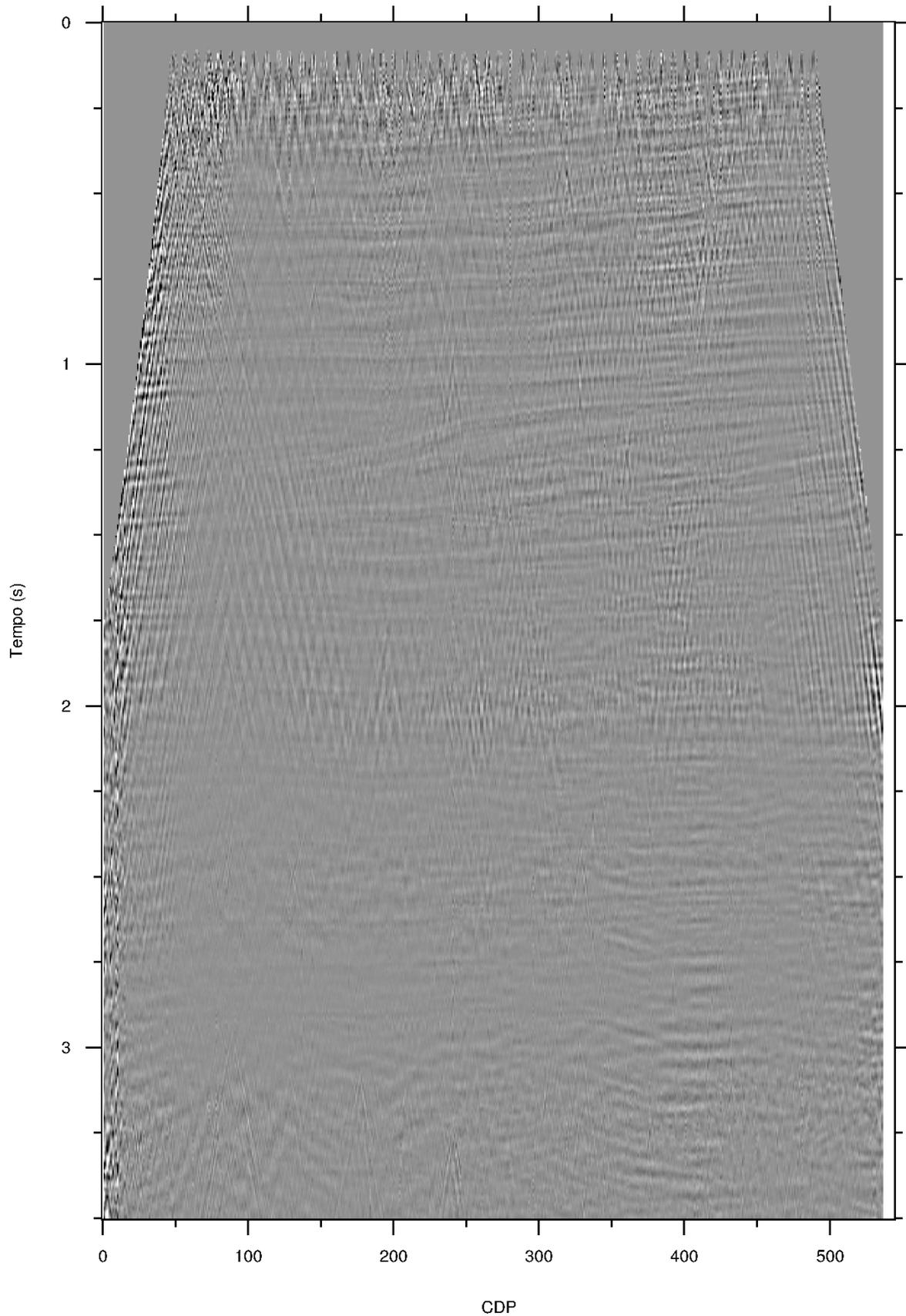
Fonte: O autor.

Figura 73: Seção empilhada bruta.



Fonte: O autor.

Figura 74: Resíduo da seção final empilhada.



Fonte: O autor.

## 5 Conclusão

O presente trabalho apresentou a aplicação prática da transformada curvelet no processamento de dados sísmicos, ilustrando sua aplicação em dados caráter sintético e real. A metodologia apresentada relaciona um método robusto de truncamento via Bayes adaptado a análise da distribuição dos coeficientes no domínio curvelet, utilizando a representação aqui proposta. Desta forma, com a aplicação de metodologia é possível discernir ruídos com caráter coerente e direcional e atenuá-los pontualmente.

Na aplicação em dados sintéticos, foi possível atenuar tanto ruídos aleatórios com características distintas, além da remoção conjunta do ruído coerente. Estendendo esta aplicação no processamento de um dado real, também foi possível a supressão do ruído do tipo *ground-roll*. Através da remoção dos coeficientes em diferentes escalas de uma única direção permitiu reter informações relevante do dado sísmico, melhorando a correlação entre refletores. Outro aspecto relevante da transformada curvelet é a possibilidade de sua aplicação em processamentos que visam a preservação de amplitudes sísmicas.

Cabe ressaltar que para a remoção dos ruídos aqui apresentada não contempla a ocorrência de *aliasing* no domínio do espaço. Isso se deve ao fato do falseamento distorcer a representação dos eventos sísmicos no domínio de Fourier, afetando a aplicação da transformada curvelet. Sendo assim, o mesmo deve ser solucionado anteriormente a aplicação da transformada curvelet.

Como sugestões de trabalhos futuros os seguintes tópicos:

- Ajuste automático dos valores de  $\alpha_{i,j}$  (Equação 3.40) cuja atual formulação fica a critério não especificado do usuário ;
- Aplicação da filtragem localizada espacialmente em conjunto com seleção da escala e direção.

## 6 Referências

- ADDISON, P. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*. Taylor & Francis, 2002. v. 38. 298 p. ISSN 08998205. ISBN 978-0-7503-0692-8. Disponível em: <http://www.crcnetbase.com/doi/book/10.1201/9781420033397>.
- BIRD, K. J.; HOUSEKNECHT, D. W. *U . S . Geological Survey 2002 Petroleum Resource Assessment of the National Petroleum Reserve in Alaska (NPRA)*. [S.l.], 2002. 6 p. Disponível em: <https://pubs.usgs.gov/fs/2002/fs045-02/>.
- BRUYNZEEL, J. W.; GULDENZOPF, E. C.; JPICKARD, E. *Petroleum exploration of NPRA, 1974-1981 : final report*. Houston: The Division, 1982. 940 p.
- CANDÈS, E. et al. Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling & Simulation*, SIAM, v. 5, n. 3, p. 861–899, 2006. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/05064182X>.
- CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. Ridgelets: a key to higher-dimensional intermittency? *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 357, n. 1760, p. 2495—2509, 1999. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/55175>.
- CANDÈS, E. J.; DONOHO, D. L. Curvelets - A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges. In: COHEN, A.; RABUT, C.; SCHUMAKER, L. L. (Ed.). *Curves and Surface Fitting: Saint-Malo 1999*. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 2000. p. 420. ISBN 0-8265-1357-3. Disponível em: <http://www.dtic.mil/docs/citations/ADP011978>.
- CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, v. 9, n. 9, p. 1522–31, 2000. ISSN 1057-7149.
- DONNO, D.; CHAURIS, H.; NOBLE, M. Curvelet-based multiple prediction. *Geophysics*, v. 75, n. 6, p. WB255–WB263, 2010. ISSN 0016-8033. Disponível em: <http://library.seg.org/doi/10.1190/1.3502663>.
- DONOHO, D. L. Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data. In: *In Proceedings of Symposia in Applied*

- Mathematics*. American Mathematical Society, 1993. p. 173—205. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.41.7262>.
- DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, v. 90, n. 432, p. 1200–1224, 1995. ISSN 1537274X.
- FRANCO, A. P.; MORAES, F. S. Local Multilevel Threshold filtering in the curvelet domain. In: *14th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*. Rio de Janeiro: SBGf, 2015. p. 1274–1278.
- GABOR, D. Theory of communication. part 1: The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering*, IET, v. 93, n. 26, p. 429–441, 1946. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5298517/>.
- GAN, S. et al. Seismic data reconstruction via fast projection onto convex sets in the seislet transform domain. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*. New Orleans: Society of Exploration Geophysicists, 2015. p. 3814–3819. ISSN 19494645. Disponível em: <http://library.seg.org/doi/10.1190/segam2015-5744782.1>.
- GAVOTTI, P. E.; LAWTON, D. C. *Seismic processing workflow for suppressing coherent noise while retaining low-frequency signal*. [S.l.], 2013. v. 25, 1–16 p.
- GOMES, V. M. *Análise da atenuação de ruídos via transformada Curvelet em dados sísmicos pós-empilhamento*. 187 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2017.
- GOMES, V. M. et al. 2D Poststack Seismic Data Inversion with Curvelet Denoising Preconditioning. In: *79th EAGE Conference & Exhibition 2017*. Paris: [s.n.], 2017. p. 5.
- GORRSZCZYK, A.; ADAMCZYK, A.; MALINOWSKI, M. Application of curvelet denoising to 2D and 3D seismic data - Practical considerations. *Journal of Applied Geophysics*, v. 105, p. 78–94, 2014. ISSN 09269851.
- GÓRSZCZYK, A. *Application of Discrete Curvelet Transform in enhanced seismic imaging and accurate velocity model building*. 126 p. Tese (Doutorado) — Polish Academic of Science, 2017.

- HEJAZI, S. M.; SHAHBAZIAN, M.; RIAHI, M. A. Angle based curvelet transform method for ground roll removal. *Australian Journal of Basic and applied sciences*, v. 7, n. 4, p. 123–132, 2013.
- HENNENFENT, G.; COLE, J.; KUSTOWSKI, B. Interpretative noise attenuation in the curvelet domain. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. San Antonio: Society of Exploration Geophysicists, 2011. p. 3566–3570. Disponível em: <http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.3627941>.
- HENNENFENT, G.; HERRMANN, F. J. Seismic denoising with nonuniformly sampled curvelets. *Computing in Science and Engineering*, v. 8, n. 3, p. 16–25, 2006. ISSN 15219615. Disponível em: <https://www.computer.org/csdl/mags/cs/2006/03/c3016-abs.html>.
- HERRMANN, F. J. et al. Curvelet-based migration preconditioning and scaling. *GEOPHYSICS*, v. 74, n. 4, p. A41–A46, jul 2009. ISSN 0016-8033. Disponível em: <http://library.seg.org/doi/10.1190/1.3124753>.
- HERRMANN, F. J.; HENNENFENT, G. Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames. *Geophysical Journal International*, v. 173, n. 1, p. 233–248, 2008. ISSN 0956540X.
- KUMAR, V. et al. Enhancing crustal reflection data through curvelet denoising. *Tectonophysics*, 2011. ISSN 00401951.
- LUPINACCI, W. M.; FRANCO, A. P.; ASSIS, C. A. M. Um fluxo proposto de condicionamento de dados pós-empilhamento para a interpretação sísmica. In: *VII Simpósio Brasileiro de Geofísica*. Ouro Preto: [s.n.], 2016. p. 4.
- MA, J.; PLONKA, G. The Curvelet Transform: A review of recent applications. *IEEE signal processing magazine*, v. 27, n. 2, p. 118–133, 2010. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5438971/>.
- MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2. ed. San Diego: Academic Press, 1999. 805 p. ISSN 10538801. ISBN 9780124666061. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124666061500040>.

NAGHIZADEH, M.; SACCHI, M. Beyond alias hierarchical scale curvelet interpolation of regularly and irregularly sampled seismic data. *Geophysics*, v. 75, n. 6, p. WB189–WB202, 2010. ISSN 0016-8033.

NAGHIZADEH, M.; SACCHI, M. Ground-roll attenuation using curvelet downscaling. *Geophysics*, v. 83, n. 3, p. V185–V195, 2018. ISSN 0016-8033. Disponível em: <https://library.seg.org/doi/10.1190/geo2017-0562.1>.

NEELAMANI, R. et al. Coherent and random noise attenuation using the curvelet transform. *The Leading Edge*, v. 27, n. 2, p. 240–248, 2008. ISSN 1070-485X. Disponível em: <http://library.seg.org/doi/10.1190/1.2840373>.

OLIVEIRA, M. S. et al. Seismic denoising using curvelet analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 391, n. 5, p. 2106–2110, 2012. ISSN 03784371.

RIOUL, O.; VETTERLI, M. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 8, n. 4, p. 14–38, oct 1991. ISSN 1053-5888. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/91217/>.

SHAN, H.; MA, J.; YANG, H. Comparisons of wavelets, contourlets and curvelets in seismic denoising. *Journal of Applied Geophysics*, Elsevier B.V., v. 69, n. 2, p. 103–115, oct 2009. ISSN 09269851. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2009.08.002>.

STARCK, J.-L.; MURTAGH, F.; FADILI, M. J. *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets, Curvelets, Morphological Diversity*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 316 p. ISSN 9781316104514. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9781316104514>.

YANG, P.; GAO, J.; CHEN, W. Curvelet-based POCS interpolation of nonuniformly sampled seismic records. *Journal of Applied Geophysics*, Elsevier B.V., v. 79, p. 90–99, 2012. ISSN 09269851. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.12.004>.

YILMAZ, O. *Seismic Data Analysis*. Society of Exploration Geophysicists, 2001. ISBN 978-1-56080-158-0. Disponível em: <https://library.seg.org/doi/book/10.1190/1.9781560801580>.